**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

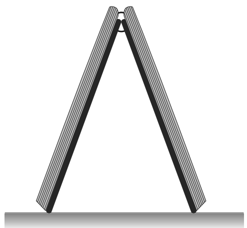
Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Tanek priročnik z navodili, vezan s spiralo, ima 100 listov. Posamezen list ima 20-krat manjšo maso kot posamezna platnica priročnika. Priročnik odpremo za več kot 180° in ga položimo na mizo, tako da so platnice v notranjosti (glej sliko). Največji kot med platnicama, pri katerem priročnik še ne zdrsne, je odvisen od števila listov ob posamezni platnici.

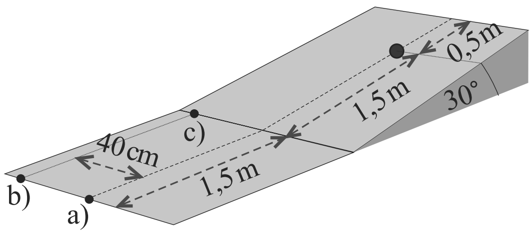


   a) Določi največji kot, če je ob vsaki platnici enako listov (50, 50).

   b) Pod kolikšnim kotom pa moramo postaviti platnici priročnika, da bo stal tudi, ko so vsi listi na eni strani?

   Koeficient lepenja med platnico priročnika in mizo je 0,1.

2. Pri igranju mini golfa želi igralec spraviti žogico v luknjo, ki se nahaja na klancu. Dimenzije klanca in ravnine pred klancem so podane na sliki. Žogico obravnavaj kot točkasto telo (ni kotaljenja), giblje se brez trenja, pri prehodu žogice z ravnine v klanec ni trka.



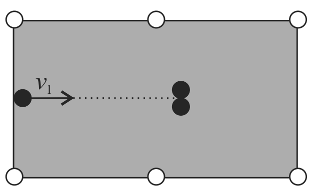
   a) S kolikšno hitrostjo moramo poslati žogico z začetka ravnine po simetrali, da bo ravno padla v luknjo?

   b) S kolikšno hitrostjo in v kateri smeri moramo poslati žogico z začetka ravnine, da bo ravno še padla v luknjo, če je začetni položaj žogice 40 cm vstran od simetrale?

   c) S kolikšno hitrostjo in v kateri smeri moramo poslati žogico, da bo padla v luknjo, pri čemer pa želimo, da žogica pred tem najprej doseže najvišjo točko klanca? Začetni položaj je tik ob vznožju klanca, 40 cm vstran od simetrale.

3. Cirkusant se pri svojem nastopu spusti z gugalnico, ki jo sestavlja lahka raztegljiva vrv dolga 23 m, pritrjena 25 m nad tlemi. Z ravno, nenapeto vrvjo se spusti s ploščadi, ki je na višini h nad tlemi. Pod pritrdiščem vrvi ima cirkusant hitrost zgolj v vodoravni smeri. Največ kolikšna je lahko višina h ploščadi, da med nastopom ne udari ob tla? Prožnostni koeficient vrvi je 1100 N/m, cirkusant ima maso 95 kg. Cirkusant je med spuščanjem v skrčenem položaju, tako da ga lahko obravnavaš kot točkasto telo, in ne niha na vrvi.

4. Miha in Marko sta se odločila za igranje biljarda na gladki podlagi. Sredi igre sta naletela na situacijo, ko bi Marko lahko z enim udarcem hkrati v luknji poslal dve kroglici (glej sliko). Biljardna kroglica z neko začetno hitrostjo v_1 prožno trči z dvema enakima mirujočima kroglicama. V nadaljevanju pri izračunih predpostavi, da kroglice drsijo brez trenja (ni kotaljenja).



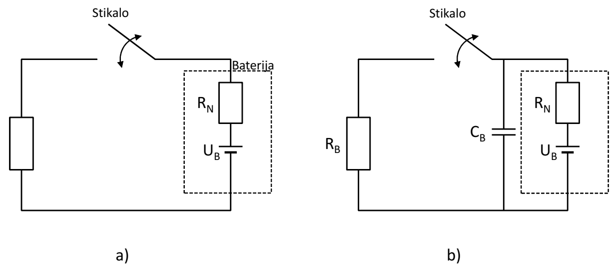
   Kolikšne so velikosti hitrosti kroglic takoj po trku, če je hitrost prve kroglice tik pred trkom $v_1 =$ 1 m/s?

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Upornika 100 kΩ in 500 kΩ vežemo zaporedno na izvir z gonilno napetostjo U_g in zanemarljivim notranjim uporom. Najmanj koliko mora biti upor voltmetra, s katerim merimo napetost na uporniku za 100 kΩ, da napaka izmerjene napetosti ni večja od 10 %?

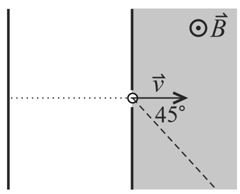
2. Tokokrog sestavlja breme z uporom 10 Ω, stikalo in baterija z napetostjo 10 V in notranjim uporom 1 Ω, kot prikazuje slika a). S hitrim vklapljanjem in izklapljanjem stikala reguliramo povprečno moč, ki se troši na bremenu. Perioda vklapljanja stikala je konstantna, spremenljivo pa je razmerje med trajanjem vklopljenega stikala in periodo vklapljanja stikala.



Temu parametru, ki je iz razumljivih razlogov med 0 in 100 %, pravimo delovni cikel.

a) Kolikšen naj bo delovni cikel, da bo breme trošilo moč 5 W?
b) Kolikšen je izkoristek takega vezja, ki ga definiramo kot razmerje med močjo na bremenu in močjo baterije?
c) V vezje dodamo kondenzator, kot prikazuje slika b). Počakamo, da se razmere na kondenzatorju ustalijo. To pomeni, da v enem ciklu priteče na kondenzator toliko naboja, kolikor ga z njega odteče. Kondenzator ima dovolj veliko kapaciteto, da je na njem ves čas konstantna napetost. Kolikšna moč se tedaj ob nespremenjenem delovnem ciklu troši na bremenu?

3. Spektrometer za merjenje mas majhnih okroglih delcev z gostoto $\rho = 1000$ kg/m^3 je sestavljen iz dveh kondenzatorskih plošč in komore z magnetnim poljem. V kondenzatorju delce, naelektrene s površinsko gostoto naboja $\sigma = 2{,}2 \cdot 10^2$ As/m^2, pospešimo z napetostjo $U = 24$ V. Delci zapuščajo kondenzator skozi majhno luknjico v smeri pravokotno na ploščo kondenzatorja in vstopajo v komoro z gostoto magnetnega polja $B = 1$ T. Smer magnetnega polja je pravokotna na hitrost (glej sliko). V kondezatorju in komori je vakuum. Gravitacijske sile na delec ni potrebno upoštevati.



V komori z magnetnim poljem so detektorji delcev, razporejeni na premici (na sliki označena črtkano), ki gre skozi luknjico in je pravokotna na magnetno polje, s pravokotnico na ploščo kondenzatorja pa tvori kot 45°. Izpelji odvisnost razdalje, na kateri delec zadane detektor, od mase delca. Razdaljo merimo od plošče kondenzatorja, skozi katero pride delec v komoro.

Izračunaj, na katerih razdaljah zadanejo detektor delci z masami 1 μg, 2 μg in 3 μg?

4. Da človek ohranja svojo telesno temperaturo, potrebuje na dan 9 MJ energije, ki jo dobi s hrano.

a) Kolikšen povprečni toplotni tok oddaja človek v okolico?
b) Okolica mora zato imeti nižjo temperaturo. Kolikšna naj bo temperatura zunanje plasti oblačila z debelino 1 cm iz tkanine s toplotno prevodnostjo 0,05 W/mK, da človeka ne bo zeblo, niti mu ne bo vroče? Temperatura človeške kože je 33 °C, površina človeka, na kateri oddaja toplotni tok, pa je 1,5 m^2.
c) Privzemimo, da ves toplotni tok s površja oblačila odnaša zrak, ki se ob stiku z obleko segreva in zato dviguje, na njegovo mesto pa priteka hladnejši zrak (pojav imenujemo *konvekcija*). Toplotni tok je sorazmeren z razliko temperature površja T_p in zraka T_z in površino S, na kateri se zrak segreva: $P = \Lambda_k S(T_p - T_z)$; pri tem je Λ_k konvekcijski koeficient. Za zrak vzemimo $\Lambda_k = 10$ W/m^{2}K. Kolikšna naj bo debelina obleke, da človeka ne bo zeblo pri temperaturi zraka 10 °C? Drugi podatki so enaki kot pri b).

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Nekega dne gre Boris na zorbing. Zorb je votla krogla, v katero je vpet Boris. Zorb tehta 20 kg in ima premer 2,5 m, Boris pa tehta 70 kg. Boris je vpet simetrično glede na središče krogle. Pri tem je iztegnjen, z rokami in nogami se togo drži za ročaje znotraj zorba, tako da ga lahko obravnavaš kot homogeno palico z dolžino 1,8 m. Zorb spustimo s hriba z višino 20 m. Kolikšno hitrost doseže zorb ob vznožju hriba,

   a) če je os vrtenja pravokotna na iztegnjenega Borisa in gre skozi njegovo težišče?

   b) če os vrtenja sovpada z iztegnjenim Borisom?

   Zračni upor lahko zanemariš, zorb, ki ga obravnavaj kot togo telo, pa se po tleh kotali brez spodrsavanja. Vztrajnostni moment votle krogle okrog središča je 2/3 mr^2, palice okrog simetrijske osi pa 1/12 ml^2.

2. Dve uteži z masama M_1 in M_2 sta povezani z vzmetjo s konstanto k. V utež z maso M_1 prileti v liniji neraztegnjene vzmeti projektil z maso m in hitrostjo v_0, ki se po trku sprime z utežjo. S kolikšno frekvenco zanihata obe uteži in kolikšna je najmanjša razdalja, na katero se približata? Dolžina neraztegnjene vzmeti je d.

3. Da človek ohranja svojo telesno temperaturo, potrebuje na dan 9 MJ energije, ki jo dobi s hrano.

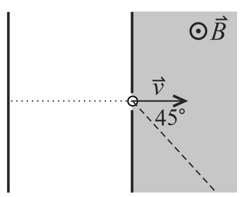
   a) Kolikšen povprečni toplotni tok oddaja človek v okolico?

   b) Okolica mora zato imeti nižjo temperaturo. Kolikšna naj bo temperatura zunanje plasti oblačila z debelino 2 cm iz tkanine s toplotno prevodnostjo 0,05 W/mK, da človeka ne bo zeblo, niti mu ne bo vroče? Temperatura človeške kože je 33 °C, površina človeka, na kateri oddaja toplotni tok, pa je 1,5 m^2.

   c) Privzamemo lahko, da polovico toplotnega toka s površja oblačila odnaša zrak z naravno konvekcijo, drugo polovico pa površje odda s sevanjem. Kolikšna naj bo debelina obleke, da človeka ne bo zeblo pri temperaturi zraka 10 °C? Površje oblačila obravnavamo kot črno telo, Stefanova konstanta je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Drugi podatki so enaki kot pri b).

   d) V tem delu računamo oddano toploto pri konvekciji s formulo $P = \Lambda_k S(T_p - T_z)$, kjer je T_p temperature površja oblačila, T_z temperatura zraka (okolice), S površina, na kateri človek oddaja toploto okolici, in Λ_k konvekcijski koeficient. Za zrak vzemimo $\Lambda_k = 10$ W/m^{2}K. Kolikšna naj bo debelina obleke v tem primeru? Kolikšno je razmerje toplotnih tokov zaradi konvekcije in zaradi sevanja? Drugi podatki so enaki kot pri c). (*Namig:* Enačbo za izsevani tok zapiši v obliki $P = k\Delta T$, koeficient k smiselno oceni, na primer z iteracijo rešitve.)

4. Spektrometer za merjenje mas majhnih okroglih delcev z gostoto $\rho = 1000$ kg/m^3 je sestavljen iz dveh kondenzatorskih plošč in komore z magnetnim poljem. V kondenzatorju delce, naelektrene s površinsko gostoto naboja $\sigma = 2{,}2 \cdot 10^2$ As/m^2, pospešimo z napetostjo $U = 24$ V. Delci zapuščajo kondenzator skozi majhno luknjico v smeri pravokotno na ploščo kondenzatorja in vstopajo v komoro z gostoto magnetnega polja $B = 1$ T. Smer magnetnega polja je pravokotna na hitrost (glej sliko). V kondezatorju in komori je vakuum. Gravitacijske sile na delec ni potrebno upoštevati.



   V komori z magnetnim poljem so detektorji delcev, razporejeni na premici (na sliki označena črtkano), ki gre skozi luknjico in je pravokotna na magnetno polje, s pravokotnico na ploščo kondenzatorja pa tvori kot 45°. Izpelji odvisnost razdalje, na kateri delec zadane detektor, od mase delca. Razdaljo merimo od plošče kondenzatorja, skozi katero pride delec v komoro.

   Izračunaj, na katerih razdaljah zadanejo detektor delci z masami 1 μg, 2 μg in 3 μg?

Državno tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2010

Ptuj, 9. april 2011

Kazalo

Skupina I – rešitve

Zaradi težavnosti prve naloge te naloge ne upoštevamo pri maksimalnem možnem številu točk v tej skupini. Maksimalno število točk v tej skupini, glede na katerega se računa uspeh tekmovalca, je tako 30. Točke, ki jih je tekmovalec dosegel pri tej nalogi, pa se vseeno štejejo pri skupni vsoti doseženih točk tekmovalca.

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $m_1 = m_p/20$, $k_l = 0{,}1$, $N_0 = 100$, $N_1 = 50$.

   Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri sledi, da sta sili lepenja F_l na platnici nasprotno enaki. Vsota normalnih komponent sile podlage je enaka teži knjige.

   a) V tem primeru lahko gledamo le sile polovico knjige. Navore zapišemo za os v vrhu, podoben rezultat dobimo, če os postavimo v dotikališče knjige s podlago. Če označimo dolžino platnice z l, s φ *polovični* kot med platnicama in s F_g težo polovice knjige, velja:

   $$lF_l \cos\varphi + \tfrac{1}{2} lF_g \sin\varphi - lF_g \sin\varphi = 0\,.$$

   Od tod

   $$\frac{F_l}{F_g} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi} \le k_l\,.$$

   V mejnem primeru velja

   $$\tan\varphi = 2k_l\,, \qquad \varphi = 11{,}3^\circ\,, \qquad \vartheta = 2\varphi = 22{,}6^\circ\,.$$

   [4 t.]

   b) Z F_{g1} označimo težo težjega dela knjige, z F_{g2} lažjega, z F_1 silo podlage na težjo platnico in z F_2 silo podlage na lažjo platnico. Velja $F_{g1} + F_{g2} = F_1 + F_2$. Ravnovesje navorov najprej zapišimo za celotno knjigo; os postavimo v dotikališče težje platnice. [1 t.]

   Velja

   $$\tfrac{1}{2} lF_{g1} \sin\varphi + \tfrac{3}{2} lF_{g2} \sin\varphi - 2lF_2 \sin\varphi = 0\,, \qquad F_2 = \tfrac{1}{4}\left(F_{g1} + 3\,F_{g2}\right)$$

   in podobno

   $$F_1 = \tfrac{1}{4}\left(F_{g2} + 3\,F_{g1}\right).$$

   Postavimo še os v vrh in zapišimo ravnovesje navorov za lažji del knjige:

   $$lF_l \cos\varphi + \tfrac{1}{2} lF_{g2} \sin\varphi - lF_2 \sin\varphi = 0\,.$$

   [2 t.]

Od tod takoj sledi

$$F_l = (F_2 - \tfrac{1}{2}F_{g2})\tan\varphi = \tfrac{1}{4}(F_{g1} + F_{g2})\tan\varphi$$

in podobno za drugi del knjige. Pogoja za ravnovesje sta

$$\frac{F_l}{F_1} = \frac{F_{g1} + F_{g2}}{F_{g1} + 3F_{g2}}\tan\varphi \le k_l \quad \text{in} \quad \frac{F_l}{F_2} = \frac{F_{g1} + F_{g2}}{3F_{g1} + F_{g2}}\tan\varphi \le k_l\,.$$

Najprej se poruši ravnovesje pri lažjem delu knjige. Mejni kot je

$$\tan\varphi = \frac{F_{g1} + 3F_{g2}}{F_{g1} + F_{g2}}\,k_l = \frac{m_p + 100m_1 + 3m_p}{m_p + 100m_1 + m_p}\,k_l = \frac{9k_l}{7}\,, \quad \vartheta = 2\varphi = 14{,}6^\circ\,.$$

[3 t.]

2. *Podatki:* $l_1 = 1{,}5$ m, $l_2 = 1{,}5$ m, $l_3 = 0{,}5$ m, $d = 40$ cm, $\varphi = 30^\circ$.

a) Začetna kinetična energija se spremeni v potencialno energijo na koncu:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl_2\sin\varphi = \tfrac{1}{2}mgl_2\,, \qquad v = \sqrt{gl_2} = 3{,}83\ \mathrm{m/s}\,.$$

[2 t.]

b) Na klancu deluje pospešek $a = g\sin\vartheta = \frac{1}{2}g$ v smeri po klancu navzdol. Os y usmerimo po klancu navzgor, os x pa prečno. V y smeri se kroglica ravno ustavi, ko doseže luknjo: Velja

$$l_2 = v_y t_2 - \tfrac{1}{2}at_2^2\,, \qquad 0 = v_y - at_2\,.$$

Od tod dobimo

$$v_y = \sqrt{2al_2} = 3{,}83\ \mathrm{m/s} \quad [1\ \text{t.}]\ \text{in} \quad t_2 = \frac{v_y}{a} = 0{,}78\ \mathrm{s}\,.$$

Za gibanje po ravnini pa porabi čas $t_1 = l_1/v_y = 0{,}39$ s. [1 t.]

V času $t_1 + t_2$ prepotuje v prečni smeri razdaljo d, od tod

$$v_x = \frac{d}{t_1 + t_2} = 0{,}34\ \mathrm{m/s}\,, \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3{,}85\ \mathrm{m/s}$$

[1 t.]

ter

$$\tan\vartheta = \frac{v_x}{v_y}\,, \qquad \vartheta = 5{,}1^\circ\,.$$

[1 t.]

c) Podobno kot pri b) dobimo za hitrost v smeri y:

$$v_y = \sqrt{2a(l_2 + l_3)} = 4{,}43 \text{ m/s}$$

[1 t.]

in za čas potovanja do vrha klanca in od tam do luknje:

$$t = \frac{v_y}{a} + \sqrt{\frac{2l_3}{a}} = 1{,}355 \text{ s}\,.$$

[1 t.]

Od tod dobimo še komponento hitrosti v smeri x:

$$v_x = \frac{d}{t} = 0{,}295 \text{ m/s}$$

[1 t.]

in končno

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4{,}4 \text{ m/s}$$

ter

$$\tan\vartheta = \frac{v_x}{v_y}\,, \qquad \vartheta = 3{,}8^\circ\,.$$

[1 t.]

3. *Podatki:* $l = 23$ m, $\Delta l = 2$ m, $k = 1100$ N/m, $m = 95$ kg.

   Zapišimo Newtonov zakon za kroženje v najnižji točki cirkusantove trajektorije:

$$m\,\frac{v_2^2}{l + \Delta l} = k\Delta l - mg\,.$$

[4 t.]

Začetna potencialna energija cirkusanta pa se pretvori v njegovo kinetično energijo in prožnostno energijo vzmeti:

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}k\,\Delta l^2\,.$$

[3 t.]

Iz obeh enačb izrazimo h:

$$h = \left(\frac{l + \Delta l}{2}\right)\left(\frac{k\Delta l}{mg} - 1\right) + \frac{k\,\Delta l^2}{2mg} = 19{,}4 \text{ m}\,.$$

[3 t.]

4. *Podatki:* $v_0 = 1$ m/s

Z v' označimo velikost prve kroglice po trku in naj kaže v nasprotno smer začetnega gibanja, z v označimo velikosti hitrosti drugih dveh kroglic po trku; njuni komponenti v smeri x sta $v\frac{\sqrt{3}}{2}$, v smeri y pa $\pm\frac{1}{2}v$. [1 t.]

Ohranja se skupna kinetična energija

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = 2\,\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv'^2\,.$$

[2 t.]

Prav tako se ohranja gibalna količina v smeri x:

$$mv_0 = -mv' + 2mv\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

[2 t.]

(Ohranitev gibalne količine v smeri y je trivialno izpolnjena.) Iz druge enačbe izrazimo $v' = v\sqrt{3} - v_0$ [2 t.]

in vstavimo v prvo enačbo. Dobimo

$$v = \frac{2\sqrt{3}}{5}\,v_0 = 0{,}693 \text{ m/s}\,,$$

[1 t.]

in še

$$v' = v\sqrt{3} - v_0 = \frac{1}{5}\,v_0 = 0{,}200 \text{ m/s}\,.$$

[2 t.]

Skupina II – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 500$ kΩ.

   Ko voltmeter ni priključen, je napetost na prvem uporniku

   $$U_1 = \frac{R_1 U_g}{R_1 + R_2}$$

   [3 t.]

   Ko priključimo voltmeter, je tok v vezju enak

   $$I = \frac{U_g}{\dfrac{R_1 R_n}{R_1 + R_n} + R_2}$$

   in napetost na R_1

   $$U_1' = U_g - R_2 I = \frac{R_1 R_n U_g}{R_n(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

   [4 t.]

   Napetost je manjša za razmerje

   $$\frac{U_1 - U_1'}{U_1} = \frac{R_1 R_2}{R_n(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \leq \frac{1}{10}$$

   [2 t.]

   V mejnem primeru

   $$R_n = \frac{9 R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 750 \text{ k}\Omega\,.$$

   [1 t.]

2. *Podatki:* $R = 10\ \Omega$, $R_n = 1\ \Omega$, $U_0 = 10$ V, $P_a = 5$ W.

   a) Moč, ko je stikalo priključeno je, $P_0 = RU_0^2/(R + R_n)^2$. Delovni cikel je:

   $$\delta = \frac{t}{t_0} = \frac{P_a}{P_0} = \frac{P(R + R_n)^2}{RU_0^2} = 60{,}5\ \%\,.$$

   Pri tem je t_0 čas enega cikla, t pa čas, ko je stikalo vključeno. [3 t.]

   b) Izkoristek razmerje med močjo, ki se troši na bremenu, in močjo, ki se troši na bremenu in notranjem uporniku:

   $$\eta = \frac{I^2 R}{I^2(R + R_n)} = \frac{R}{R + R_n} = 91\ \%\,.$$

   [2 t.]

c) Napetost na kondenzatorju je manjša od gonilne napetosti, zato se kondenzator ves čas polni s tokom $I_n = (U_0 - U_V)/R_n$, prazni pa se s tokom I, ki steče v času, ko je stikalo odprto, skozi breme. Iz ohranitve naboja v enem ciklu velja:

$$It = I_n t_0\,, \qquad \frac{I_n}{I} = \frac{t}{t_0} = \delta\,.$$

Tokova izrazimo z napetostima:

$$\frac{U_C}{R}\,t = \frac{U_0 - U_c}{R_n}\,t_0$$

in dobimo

$$U_C = \frac{U_0}{\delta\,\dfrac{R_n}{R} + 1}\,.$$

Povprečna moč na bremenu je

$$P = \frac{U_c^2}{R}\,\frac{t}{t_0} = \frac{U_c^2}{R}\,\delta = 5{,}38\ \mathrm{W}\,.$$

[5 t.]

3. *Podatki:* $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $\sigma = 2{,}2 \cdot 10^2\ \mathrm{As/m^2}$, $U = 24$ V, $B = 1$ T.

V kondenzatorju dobijo delci kinetično energijo:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = eU$$

[1 t.]

in v magnetnem polju zakrožijo po krožnici z radijem r, za katero velja

$$m\,\frac{v^2}{r} = evB\,, \qquad r = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}\,.$$

[2 t.]

Ker so detektorji na premici pod kotom 45°, je iskana oddaljenost od plošče kar enaka radiju kroženja. Naboj izrazimo z radijem kroglice, tega pa z njeno maso in gostoto:

$$e = 4\pi r_k^2\sigma = 4\pi\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\,.$$

[3 t.]

Odvisnost razdalje od mase potem lahko zapišemo kot

$$x = r = \sqrt{\frac{2U\rho}{3\sigma B^2}}\,\sqrt[6]{\frac{3}{4\pi\rho}}\,\sqrt[6]{m}\,.$$

[3 t.]

Za iskane razdalje po vrsti dobimo 6,7 cm, 7,5 cm in 8,1 cm. [1 t.]

4. *Podatki:* $Q = 9$ MJ, $t = 24$ h, $d_b = 1$ cm, $\lambda = 0{,}05$ W/mK, $T_k = 33$ °C, $S = 1{,}5$ m^2, $\Lambda_k = 10$ W/m^{2}K, $T_0 = 10$ °C.

a)

$$P = \frac{Q}{t} = 104 \text{ W}\,.$$

[1 t.]

b) Če s T_p označimo iskano temperaturo, velja

$$P = \frac{\lambda\, S\, (T_k - T_p)}{d_b}\,, \qquad T_p = T_k - \frac{P\, d_b}{\lambda\, S} = 19 \text{ °C}\,.$$

[4 t.]

c) Toplotni tok, ki ga človek oddaja s konvekcijo, je enak toplotnemu toku, ki se sprošča v telesu. Od tod lahko izračunamo temperaturo površja oblačila:

$$P = \Lambda_k\, S\, (T_p - T_0)\,, \qquad T_p = T_0 + \frac{P}{\Lambda_k\, S} = 17 \text{ °C}\,.$$

Iz zveze za prevajanje pri b) sedaj dobimo iskano debelino

$$d_c = \frac{\lambda(T_k - T_p)S}{P} = 1{,}15 \text{ cm}\,.$$

[5 t.]

Skupina III – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $2r = 2{,}5$ m, $l = 1{,}8$ m, $m_Z = 20$ kg, $m_B = 70$ kg, $h = 20$ m.

   Potencialna energija zorba z Borisom se spremeni v translacijsko in rotacijsko kinetično energijo:

   $$(m_B + m_Z)gh = \tfrac{1}{2}(m_B + m_Z)v^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2\,.$$

   Velja še $\omega = v/r$. [3 t.]

   a) Vztrajnostni moment je sestavljen iz votle krogle in palice, ki se vrti okoli središča:

   $$J = \frac{2}{3}\,m_Z r^2 + \frac{1}{12}\,m_B l^2\,.$$

   [3 t.]

   Izraz vstavimo v prvo enačbo in dobimo

   $$v = \sqrt{\frac{2(m_B + m_Z)gh}{\frac{5}{3}\,m_Z + m_B + \frac{1}{12}m_B\left(\frac{l}{r}\right)^2}} = 17{,}5\ \mathrm{m/s}\,.$$

   [2 t.]

   b) V tem primeru je vztrajnostni moment Borisa enak nič in rezultat pri a) se poenostavi v

   $$v = \sqrt{\frac{2(m_B + m_Z)gh}{\frac{5}{3}\,m_Z + m_B}} = 18{,}5\ \mathrm{m/s}\,.$$

   [2 t.]

2. *Podatki:*

   Po trku razstavimo gibanje na translacijo celotnega sistema in na nihanje glede na težišče. Za izračun frekvence vzamemo samo del vzmeti od težišča sistema do uteži. Koeficient krajše vzmeti je večji za razmerje dolžin celotne vzmeti in dela vzmeti od težišča do uteži: $k' = kd/'d$. Za prvo vzmet velja

   $$d_1' = \frac{M_2 d}{m + M_1 + M_2}\,, \qquad k_1' = k\,\frac{d}{d_1'}$$

   [3 t.]

Za krožno frekvenco nihanja prve uteži s projektilom dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1'}{m+M_1}} = \sqrt{\frac{k(m+M_1+M_2)}{M_2(m+M_1)}}$$

[2 t.] (Enako frekvenco dobimo, če naredimo račun za drugo utež.)

Največji skrček dobim iz ohranitve kinetične in prožnostne energije v trenutku, ko je hitrost nihanja glede na težišče enaka nič in v trenutku takoj po trku. Celotna energija zlepka $m + M_1$ takoj po trku je $W_{k0} = \frac{1}{2}(m + M_1)v^2$, [1 t.] kjer v dobimo iz ohranitve gibalne količine, $v = mv_0/(m + M_1)$ [1 t.].

Na koncu je energija vsota kinetične energije težišča $\frac{1}{2}(m + M_1 + M_2)v^{*2}$, $v^* = mv_0/(m + M_1 + M_2)$ in prožnostne energije $\frac{1}{2}kx_0^2$. [2 t.] Skrček je potem

$$x_0 = mv_0\sqrt{\frac{M_2}{k(m+M_1)(m+M_1+M_2)}}$$

in najkrajša razdalja $d_{min} = d - x_0$. [1 t.]

3. *Podatki:* $Q = 9$ MJ, $t = 24$ h, $d_b = 2$ cm, $\lambda = 0{,}05$ W/mK, $T_k = 33$ °C, $S = 1{,}5$ m^2, $\Lambda_k = 10$ W/m^{2}K, $T_0 = 10$ °C.

   a)

$$P = \frac{Q}{t} = 104\ \mathrm{W}\,.$$

   [2 t.]

   b) Če s T_p označimo iskano temperaturo, velja

$$P = \frac{\lambda\, S\,(T_k - T_p)}{d_b}\,, \qquad T_p = T_k - \frac{P\, d_b}{\lambda\, S} = 5\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

   [2 t.]

   c) Vsota tokov zaradi konvekcije in sevanja je enaka toplotnemu toku, ki se sprošča v telesu. Polovica gre na račun sevanja in od tod lahko izračunamo temperaturo površja oblačila:

$$\tfrac{1}{2}P = \sigma\, S\,(T_p^4 - T_0^4)\,, \qquad T_p = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{P}{2\sigma\, S}} = 289{,}5\ \mathrm{K} = 16{,}5\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

   Iz zveze za prevajanje pri b) sedaj dobimo iskano debelino

$$d_c = \frac{\lambda(T_k - T_p)S}{P} = 1{,}2\ \mathrm{cm}\,.$$

   [3 t.]

d) Podobno kot pri c) sedaj zapišemo

$$P = \sigma\, S\, (T_p^4 - T_0^4) + \Lambda_k\, S\, (T_p - T_0)\,,$$

Enačbo četrte stopnje za T_p rešimo z iteracijo. Razstavimo

$$T_p^4 - T_0^4 = (T_p - T_0)(T_p + T_0)(T_p^2 + T_0^2) \equiv a(T_p - T_0)$$

V prvi iteraciji izračunamo a tako, da vzamemo $T_p = T_0$ in dobimo

$$T_p^{(1)} = T_0 + \frac{P}{4\sigma S T_0^3 + \Lambda_k S} = 287{,}58\ \mathrm{K}\,,$$

v naslednji pa $T_p = T_p^{(1)}$:

$$T_p^{(2)} = T_0 + \frac{P}{\sigma S (T_p^{(1)} + T_0)({T_p^{(1)}}^2 + T_0^2) + \Lambda_k S} = 287{,}54\ \mathrm{K}\,,$$

kar se zanemarljivo malo razlikuje od prve iteracije. Iz zveze za prevajanje pri b) sedaj dobimo iskano debelino

$$d_d = \frac{\lambda(T_k - T_p^{(2)})S}{P} = 1{,}3\ \mathrm{cm}\,.$$

Razmerje toplotnih tokov je

$$\eta = \frac{\Lambda_k}{\sigma(T_p^{(1)} + T_0)({T_p^{(1)}}^2 + T_0^2)} = 1{,}9\,.$$

[3 t.]

4. *Podatki:* $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $\sigma = 2{,}2 \cdot 10^2\ \mathrm{As/m^2}$, $U = 24\ \mathrm{V}$, $B = 1\ \mathrm{T}$.

V kondenzatorju dobijo delci kinetično energijo:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = eU$$

[1 t.]

in v magnetnem polju zakrožijo po krožnici z radijem r, za katero velja

$$m\,\frac{v^2}{r} = evB\,, \qquad r = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}\,.$$

[2 t.]

Ker so detektorji na premici pod kotom 45°, je iskana oddaljenost od plošče kar enaka radiju kroženja. Naboj izrazimo z radijem kroglice, tega pa z njeno maso in gostoto:

$$e = 4\pi r_k^2 \sigma = 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}\,.$$

[3 t.] Odvisnost razdalje od mase potem lahko zapišemo kot

$$x = r = \sqrt{\frac{2U\rho}{3\sigma B^2}} \sqrt[6]{\frac{3}{4\pi\rho}} \sqrt[6]{m}\,.$$

[3 t.]

Za iskane razdalje po vrsti dobimo 6,7 cm, 7,5 cm in 8,1 cm. [1 t.]