

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Skupina I

1. (10 točk)

Andreja vrže z balkona stolpnice z višine 20 m od tal v vodoravni smeri teniško žogico s hitrostjo 3 m/s.

- a) Kako daleč od stolpnice pade žogica na vodoravna tla?

Andrej pobere žogico in se postavi nekam na zveznico med točko na tleh natančno pod balkonom in točko, kjer je žogica padla na tla. Andreji reče, naj še enkrat na enak način vrže drugo žogico, ki jo bo poskušal zadeti tako, da bo pobrano žogico vrgel navpično navzgor.

- b) Na kolikšni razdalji od točke na tleh pod balkonom stoji Andrej, ko vrže žogico navpično navzgor s hitrostjo 15 m/s in zadane Andrejino žogico, če vržeta žogici istočasno?

2. (10 točk)

Splav je narejen iz smrekovega lesa z gostoto 600 kg/m^3 . Ima obliko kvadra z višino 20 cm in osnovno ploskev v obliki kvadrata s stranico 1 m. Splav plava v mirnem jezeru.

- a) Kako globoko je potopljeno dno splava?

Na splav začnemo previdno zlagati opeke z dimenzijami $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Gostota materiala, iz katerega so opeke, je 1450 kg/m^3 . Opeke zlagamo na splav po vsej njegovi vodoravni ploskvi tako, da se splav med nalaganjem nič ne nagiba.

- b) Največ koliko opek lahko zložimo na splav, da nobena od opek ni mokra?
c) Največ koliko opek lahko zložimo na splav, da se splav z opekami ne potopi na dno jezera?

3. (10 točk)

Po vodoravnem ravnem tiru se s hitrostjo 6 m/s giblje vagonček z maso 20 kg in se zaleti v mirujoč vagonček z maso 40 kg. Vagončka se sprimeta in skupaj nadaljujeta pot.

- a) Kolikšna je hitrost kompozicije po trku?
b) Kolikšna je razlika skupne kinetične energije vagončkov pred in po trku?

Trk na pametni telefon snema Irena z vagončka, ki se pelje na sosednjem vzporednem tiru z enako hitrostjo v isti smeri kot prvi vagonček pred trkom.

- c) Kolikšne hitrosti Irena izmeri za prvi in drugi vagonček pred in po trku iz posnetka trka na svojem pametnem telefonu?
d) Z računom pokaži, da se tudi na posnetku na pametnem telefonu skupna gibalna količina vagončkov pred in po trku ohranja.
e) Kolikšna je razlika skupne kinetične energije vagončkov pred in po trku na posnetku na Ireninem pametnem telefonu.

Skupina II

1. (8 točk)

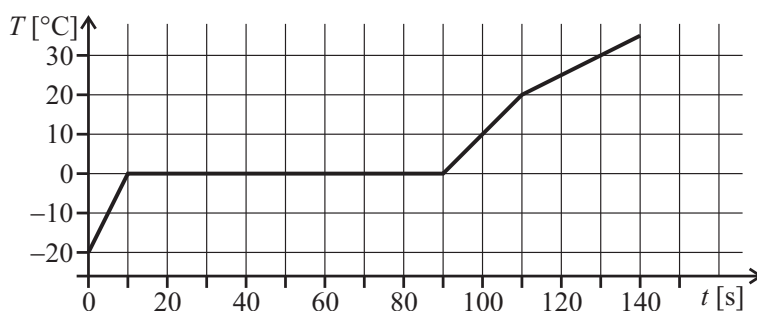
Na razpolago imamo dve bateriji z gonilno napetostjo 1,5 V in notranjnim uporom 20Ω ter upornik z uporom 50Ω .

- Bateriji in upornik vežemo med seboj zaporedno. Nariši shemo vezave in izračunaj tok skozi upornik.
- Bateriji vežemo med seboj vzporedno, da sta v stiku priključka istega predznaka. Na tako sestavljeni bateriji vežemo upornik. Nariši shemo vezave in izračunaj tok skozi upornik.
- Kolikšen bi moral biti upor upornika, da bi skozenj v vezavah a) in b) tekla enak tok?

2. (12 točk)

Graf kaže temperaturo v posodi v odvisnosti od časa. V posodi je na začetku 100 g ledu s temperaturo -20°C . Ob času 110 s dolijemo v posodo nekaj etanola s temperaturo 20°C . Posoda je toplotno izolirana, v njej je grelec, ki greje s konstantno močjo. Specifična toplota etanola je $2,6 \text{ kJ/kg K}$, specifična toplota vode je $4,2 \text{ kJ/kg K}$.

Pri reševanju naloge uporabljaj podatke, ki jih odčitavaš z grafa.



- Kolikšna je moč grelca?
- Izračunaj specifično toploto ledu.
- Izračunaj specifično talilno toploto vode.
- Kolikšna je masa dotočenega etanola?

3. (10 točk)

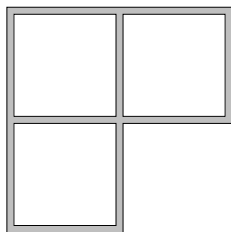
Če se s kovinsko kroglico A, na kateri je naboj 100 nAs , dotaknemo nenabite kovinske kroglice B, je na koncu na kroglici A naboj 60 nAs in na kroglici B 40 nAs . Če pa se s kroglico A z nabojem 100 nAs dotaknemo tretje nenabite kovinske kroglice C, je na koncu na A naboj 40 nAs in na C naboj 60 nAs .

- Kolikšna sta končna naboja na kroglicah A in B po stiku, če je na začetku na A naboj $+50 \text{ nAs}$ in na B naboj -100 nAs ?
- Kolikšna sta končna naboja na kroglicah B in C po stiku, če je na začetku na B naboj $+65 \text{ nAs}$, C pa ni nabita?
- Začetni naboji na kroglicah naj bodo: na A $+60 \text{ nAs}$, na B -45 nAs in na C -110 nAs . Kolikšni so naboji na A, B in C, ko vse tri kroglice staknemo?

Skupina III

1. (8 točk)

Hišo sestavljajo tri sobe, vsaka ima obliko kocke s stranico 3 m (na sliki je tloris). Vse stene so iz enakega materiala s toplotno prevodnostjo $0,35 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ in enake debeline 24 cm. Temperatura zunaj je 0°C . Toplotne izgube skozi strop in tla zanemarimo.

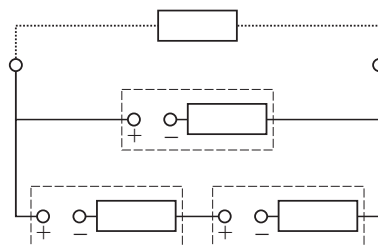


- Kolikšna je skupna moč grelcev v hiši, da je v vseh sobah enaka temperatura 20°C ?
- Kolikšna je temperatura v posamezni sobi, če moč grelca v vsaki sobi nastavimo na eno tretjino skupne moči vseh grelcev pri a), da ostane skupna moč grelcev v hiši nespremenjena?

2. (10 točk)

Na razpolago imamo več enakih baterij z gonilno napetostjo $1,5 \text{ V}$ in notranjim uporom 20Ω ter upornik z uporom 50Ω .

- Na eno baterijo vežemo upornik. Kolikšen tok teče skozi upornik?
- Zdaj vežemo zaporedno dve bateriji in upornik. Kolikšen tok teče skozi upornik? Kolikšen je notranji upor in kolikšna gonilna napetost sestava teh dveh zaporedno vezanih baterij?
- Nazadnje vežemo v sestav tri baterije. Dve sta vezani zaporedno, tretja je vezana vzporedno tema dvema. Vse tri baterije so obrnjene tako, da so pozitivni priključki obrnjeni v isto smer (glej sliko). Kolikšen tok teče skozi upornik, ko ga priključimo na ta sestav? Kolikšna sta gonilna napetost in notranji upor tega sestava iz treh baterij?



3. (12 točk)

Dve enaki kladi z masama po 1 kg sta povezani z nenapeto lahko vzmetjo s prožnostnim koeficientom 2 N/m . Podlaga je gladka, tako da kladi po njej drsita brez trenja. Če pa klada miruje, je potrebna določena sila, da jo premaknemo iz mirovanja; kladi na podlagi pripišemo koeficient lepenja $0,04$. Prvo klado pričnemo vleči s konstantno hitrostjo 4 cm/s proč od druge klade. V trenutku, ko se premakne druga klada, prvo spustimo, tako da se sistem klad prosti giblje.

- Koliko časa se giblje prva klada, preden druga zdrsne?
- Kolikšna je v trenutku, ko prvo klado spustimo, skupna kinetična energija klad in kolikšna prožnostna energija vzmeti?
- S kolikšno hitrostjo se giblje težišče obeh klad?
- Kolikšna je največja hitrost, ki jo doseže posamezna klada?

1. $v_0 = 3 \text{ m/s}$, $v_1 = 15 \text{ m/s}$, $h = 20 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Žogica z višine h pada do tal čas t_0 :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,02 \text{ s} \approx 2 \text{ s}.$$

Od tod izračunamo premik v vodoravni smeri

$$s = v_0 t_0 = 6,06 \text{ m} \approx 6,1 \text{ m} \approx 6 \text{ m}.$$

[4 t.]

b) Izrazimo višino y_1 žogice, ki jo vrže Andreja z balkona, in višino y_2 žogice, ki jo vrže Andrej navpično navzgor, kot funkciji časa t :

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \longrightarrow \quad h - \frac{1}{2}gt^2 = v_1 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Od tu dobimo

$$t = \frac{h}{v_1} = 1,33 \text{ s}$$

in končno

$$x = v_0 t_1 = \frac{v_0}{v_1} h = 4 \text{ m}.$$

[6 t.]

2. $\rho_L = 600 \text{ kg/m}^3$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_o = 1450 \text{ kg/m}^3$, $h = 20 \text{ cm}$, $S = 1 \text{ m}^2$, $V_0 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \text{ dm}^3 = 8 \text{ L}$,
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Izenačimo silo vzgona in težo splava, da izračunamo y – za koliko je potopljeno dno praznega splava:

$$hS\rho_L g = yS\rho g \quad \implies \quad y = h \frac{\rho_L}{\rho} = 12 \text{ cm}.$$

[3 t.]

b) Da bodo opeke suhe, mora biti celotna teža splava in N_1 opek na njem manjša od sile vzgona, če bi voda segala do zgornje ploskve splava:

$$(hS\rho_L + N_1V_0\rho_o)g < hS\rho g \quad \implies \quad N_1 < \frac{hS}{V_0} \frac{\rho - \rho_L}{\rho_o} = 6,89.$$

Ker mora veljati strogo manj, je največje število opek, da bodo vse suhe, enako $N_1 = 6$.

[3 t.]

c) Da se splav ne potopi na dno, mora biti celotna teža splava in N_2 opek na njem manjša od sile vzgona, če bi bil pod vodo ves splav in vse opeke na njem:

$$(hS\rho_L + N_2V_0\rho_o)g < (hS + N_2V_0)\rho g \quad \implies \quad N_2 < \frac{hS}{V_0} \frac{\rho - \rho_L}{\rho_o - \rho} = 22,22.$$

Ker mora veljati strogo manj, je največje število opek, da se splav z opekami ne potopi na dno, enako $N_2 = 22$.

[4 t.]

3. $v_0 = 6 \text{ m/s}$, $m = 20 \text{ kg}$, $M = 40 \text{ kg}$.

a) Ohranja se skupna gibalna količina $mv_0 = (m + M)v$,

$$v = \frac{mv_0}{m + M} = 2 \text{ m/s}.$$

[2 t.]

b) Razlika kinetičnih energij je

$$\Delta W = \frac{1}{2}(m + M)v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{mMv_0^2}{2(m + M)} = -240 \text{ J}.$$

[2 t.]

c) Za Ireno na vzporednem vagončku je začetna hitrost prvega vagončka enaka $v_1 = 0$ drugega pa $v_2 = -v_0 = -6 \text{ m/s}$, po trku se gibljeta oba vagončka s hitrostjo $v_{12} = v - v_0 = -4 \text{ m/s}$.

[2 t.]

d) Irena na posnetku izmeri začetno gibalno količino $G' = mv_1 + Mv_2 = -Mv_0 = -240 \text{ kgm/s}$ in končno $G = (m + M)v_{12} = -240 \text{ kgm/s}$. Torej $G = G'$, gibalna količina se ohranja tudi na posnetku.

[2 t.]

e) Razlika kinetičnih energij:

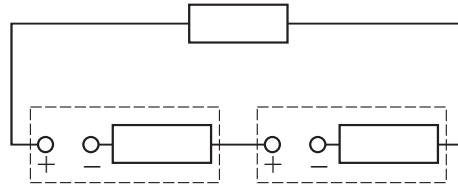
$$\Delta W' = \frac{1}{2}(m + M)v_{12}^2 - \frac{1}{2}Mv_2^2 = 480 \text{ J} - 720 \text{ J} = -240 \text{ J},$$

torej enaka kot pri b).

[2 t.]

1. $U_0 = 1,5 \text{ V}$, $R_0 = 20 \Omega$, $R = 50 \Omega$.

a)

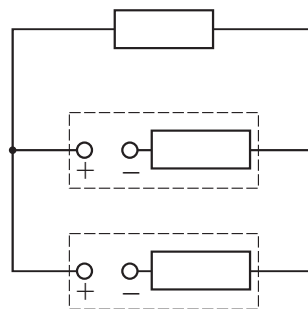


Napetost v električnem krogu nam da enačbo za tok I_1 :

$$2U_0 - 2R_0I_1 - RI_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2U_0}{R + 2R_0} = 33,3 \text{ mA} \approx 33 \text{ mA}.$$

[2 t.]

b)



Iz simetrije vezave vidimo, da skozi vsako baterijo teče polovico toka, ki teče skozi upornik. Napetost v električnem krogu nam da enačbo za tok I_2 :

$$U_0 - R_0 \frac{I_2}{2} - RI_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{2U_0}{2R + R_0} = 25 \text{ mA}.$$

[3 t.]

c) Izenačimo tokova iz a) in b) in od tu izrazimo iskano vrednost upora R' :

$$\frac{2U_0}{R' + 2R_0} = \frac{2U_0}{2R' + R_0} \quad \Rightarrow \quad R' + 2R_0 = 2R' + R_0 \quad \Rightarrow \quad R' = R_0 = 20 \Omega.$$

[3 t.]

2. Podatki v značilnih točkah grafa (t_i, T_i) so po vrsti:

| i | t_i [s] | T_i [°C] |
|-----|-----------|------------|
| 1 | 0 | -20 |
| 2 | 10 | 0 |
| 3 | 90 | 0 |
| 4 | 110 | 20 |
| 5 | 130 | 30 |

$c_v = 4,2$ kJ/kg K, $c_e = 2,6$ kJ/kg K, $m_v = 100$ g.

a) Z grafa in iz besedila razberemo, da je v času od t_3 do t_4 v posodi samo tekoča voda, ki se v času $t_4 - t_3 = 20$ s segreje za $T_4 - T_3 = 20$ K. Od tu dobimo moč grelca:

$$P(t_4 - t_3) = m_v c_v (T_4 - T_3) \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{m_v c_v (T_4 - T_3)}{t_4 - t_3} = 420 \text{ W}.$$

[3 t.]

b) Z grafa in iz besedila razberemo, da je v času od t_1 do t_2 v posodi samo led, ki se v času $t_2 - t_1 = 10$ s segreje za $T_2 - T_1 = 20$ K. Od tu dobimo specifično toploto ledu:

$$P(t_2 - t_1) = m_v c_L (T_2 - T_1) \quad \Longrightarrow \quad c_L = \frac{P(t_2 - t_1)}{m_v (T_2 - T_1)} = 2,1 \text{ kJ/kg K}.$$

Če uporabimo rezultat za P iz vprašanja a), vidimo, da rezultat ni odvisen ne od mase vode ne od moči grelca

$$\frac{m_v c_v (T_4 - T_3)}{t_4 - t_3} (t_2 - t_1) = m_v c_L (T_2 - T_1) \quad \Longrightarrow \quad c_L = c_v \frac{(T_4 - T_3)(t_2 - t_1)}{(T_2 - T_1)(t_4 - t_3)} = 2,1 \text{ kJ/kg K}.$$

[3 t.]

c) Z grafa in iz besedila razberemo, da je v času od t_2 do t_3 v posodi mešanica ledu in tekoče vode s temperaturo $T_3 = T_2 = 0$ °C oziroma da se v času $t_3 - t_2 = 80$ s ves led stali. Od tu izračunamo specifično talilno toploto vode:

$$P(t_3 - t_2) = m_v q_t \quad \Longrightarrow \quad q_t = \frac{P(t_3 - t_2)}{m_v} = c_v (T_4 - T_3) \frac{t_3 - t_2}{t_4 - t_3} = 336 \text{ kJ/kg}.$$

[3 t.]

d) Z grafa in iz besedila razberemo, da je od časa t_4 naprej v posodi mešanica etanola in vode. V času $t_5 - t_4 = 20$ s se mešanica segreje za $T_5 - T_4 = 10$ K. Od grelca prejeta toplota gre za segrevanje zmesi vode in etanola

$$P(t_5 - t_4) = (m_v c_v + m_e c_e)(T_5 - T_4).$$

Od tu dobimo maso dolitega etanola:

$$m_e = \frac{P(t_5 - t_4)}{c_e (T_5 - T_4)} - m_v \frac{c_v}{c_e} = m_v \frac{c_v}{c_e} \left[\frac{(T_4 - T_3)(t_5 - t_4)}{(T_5 - T_4)(t_4 - t_3)} - 1 \right] = 161,54 \text{ g} \approx 162 \text{ g}.$$

[3 t.]

3. $e_0 = 100 \text{ nAs}$, $e_{A1} = 60 \text{ nAs}$, $e_{B1} = 40 \text{ nAs}$, $e_{A2} = 40 \text{ nAs}$, $e_{C2} = 60 \text{ nAs}$,

Velja, da se napetosti na kroglicah po stiku izenačita, torej za kapaciteti kroglic velja:

$$\frac{e_{A1}}{C_A} = \frac{e_{B1}}{C_B}, \quad \frac{e_{A2}}{C_A} = \frac{e_{C2}}{C_C}, \quad C_B = \frac{2}{3} C_A, \quad C_C = \frac{3}{2} C_A.$$

a) $e'_A = 50 \text{ nAs}$, $e'_B = -100 \text{ nAs}$.

Skupni naboj po stiku je $e = e'_A + e'_B = -50 \text{ nAs}$, ki se razdeli med A in B v razmerju 3:2, torej $e_A = -30 \text{ nAs}$, $e_B = -20 \text{ nAs}$.

[3 t.]

b) $e'_B = 65 \text{ nAs}$,

Skupni naboj po stiku je kar $e = e'_B = 65 \text{ nAs}$. Razmerje kapacitet C in B je

$$C_C = \frac{3}{2} C_A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 C_B = \frac{9}{4} C_B.$$

Če končni naboj na B označimo z e_B , je na koncu $e_C = \frac{C_C}{C_B} e_B = \frac{9}{4} e_B$ in iz $e = e_B + e_C = \frac{13}{4} e_B$ sledi

$$e_B = \frac{4}{13} e = 20 \text{ nAs}, \quad e_C = \frac{9}{13} e = 45 \text{ nAs},$$

[3 t.]

c) $e'_A = 60 \text{ nAs}$, $e'_B = -45 \text{ nAs}$, $e'_C = -110 \text{ nAs}$.

Skupni naboj po stiku je $e = e'_A + e'_B + e'_C = -95 \text{ nAs}$. Končna naboja e_B in e_C izrazimo s končnim e_A : $e_B = \frac{C_B}{C_A} e_A = \frac{2}{3} e_A$, $e_C = \frac{C_C}{C_A} e_A = \frac{3}{2} e_A$, in iz ohranitve skupnega naboja sledi

$$e = e_A + e_B + e_C = \frac{19}{6} e_A,$$

$$e_A = \frac{6}{19} e = -30 \text{ nAs}, \quad e_B = \frac{4}{6} e_A = \frac{4}{19} e = -20 \text{ nAs}, \quad e_C = \frac{9}{6} e_A = \frac{9}{19} e = -45 \text{ nAs}.$$

[4 t.]

(Priznamo tudi rešitve, pri katerih delamo le z razmerji, brez sklicevanja na kapacitete.)

1. $a = 3,0$ m, $\lambda = 0,35$ W/mK, $d = 0,24$ m, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T = 20^\circ\text{C}$.

a) Toplotni tok teče skozi osem zunanjih sten. Velja enačba za prevajanje toplote:

$$P = \frac{\lambda 8a^2}{d} (T - T_0) = 2100 \text{ W}.$$

[3 t.]

b) V vsaki sobi je sedaj grelec z močjo $P_1 = 700$ W. Temperaturo v srednji sobi označimo s T_2 , temperaturi v krajnih sobah pa s T_1 , saj sta zaradi simetrije enaki. V srednji sobi je višja temperatura kot v krajnih sobah, saj ima le dve zunanji steni, krajni pa tri. Toplotni tok iz srednje sobe teče skozi dve zunanji steni ven, skozi dve notranji steni pa v sosednji sobi:

$$P_1 = \frac{\lambda 2a^2}{d} (T_2 - T_0) + \frac{\lambda 2a^2}{d} (T_2 - T_1).$$

Vsako od krajnih sob prejema toplotni tok iz srednje sobe in ga oddaja skozi tri zunanje stene:

$$P_1 + \frac{\lambda a^2}{d} (T_2 - T_1) = \frac{\lambda 3a^2}{d} (T_1 - T_0).$$

Prvo enačbo pomnožimo z 2 in enačbi seštejemo:

$$3P_1 = \frac{\lambda a^2}{d} (7T_2 - 7T_0), \quad T_2 - T_0 = \frac{3dP_1}{7\lambda a^2} = 22,9^\circ \text{ C}.$$

Prvotni enačbi še odštejemo, preuredimo in dobimo

$$T_1 - T_0 = \frac{5}{6} (T_2 - T_0) = 19,0^\circ \text{ C}.$$

[5 t.]

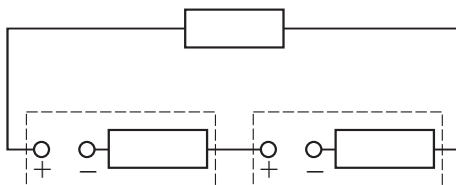
2. $U_0 = 1,5 \text{ V}$, $R_0 = 20 \Omega$, $R = 50 \Omega$.

a) Napetost v električnem krogu nam da enačbo za tok I_1 :

$$U_0 - R_0 I_1 - R I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_0}{R + R_0} = 21,4 \text{ mA} \approx 21 \text{ mA}.$$

[2 t.]

b)



Napetost v električnem krogu nam da enačbo za tok I_2 :

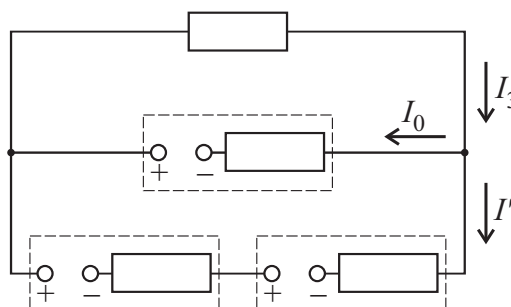
$$2U_0 - 2R_0 I_2 - R I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{2U_0}{R + 2R_0} = 33,3 \text{ mA} \approx 33 \text{ mA}.$$

Primerjava rezultata b) z rezultatom pri a) nam da gonilno napetost U_b in notranji upor R_b :

$$U_b = 2U_0 = 3 \text{ V} \quad \text{in} \quad R_b = 2R_0 = 40 \Omega.$$

[3 t.]

c)



Naj teče skozi vejo z eno baterijo tok I_0 in skozi upornik tok I_3 . Vsota napetosti v električnem krogu z upornikom in eno baterijo da enačbo

$$U_0 - R_0 I_0 - R I_3 = 0.$$

Vsota napetosti v električnem krogu z upornikom in dvema zaporedno vezanima baterijama da ob upoštevanju delitve toka ($I' = I_3 - I_0$) enačbo

$$2U_0 - 2R_0(I_3 - I_0) - R I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2U_0 + 2R_0 I_0 - (2R_0 + R) I_3 = 0.$$

Zgornjo enačbo množimo z 2 in jo seštejemo z desno obliko druge enačbe, da se znebimo toka I_0 . Ali pa iz zgornje enačbe izrazimo tok $I_0 = (U_0 - R I_3)/R_0$ in ga vstavimo v drugo enačbo. V obeh primerih dobimo na koncu enačbo

$$4U_0 - 2R_0 I_3 - 3R I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{4U_0}{3R + 2R_0} = 31,6 \text{ mA} \approx 32 \text{ mA}.$$

Gonilno napetost U_c in notranji upor sestava R_c dobimo s preoblikovanjem rezultata za I_3 v

$$I_3 = \frac{\frac{4}{3}U_0}{R + \frac{2}{3}R_0}.$$

Iz podobnosti z rezultatom pri a)

$$\frac{\frac{4}{3}U_0}{R + \frac{2}{3}R_0} = \frac{U_c}{R + R_c}$$

ugotovimo

$$U_c = \frac{4}{3}U_0 = 2\text{ V} \quad \text{in} \quad R_c = \frac{2}{3}R_0 = 13,3\ \Omega \approx 13\ \Omega.$$

Enak rezultat za gonilno napetost U_c in notranji upor R_c dobimo seveda tudi iz splošne odvisnosti toka od gonilne napetosti in notranjega upora baterije

$$I(R) = \frac{4U_0}{3R + 2R_0} = \frac{U_c}{R + R_c},$$

ki mora veljati za poljuben R .

[5 t.]

3. $m = 1,0 \text{ kg}$, $k = 2,0 \text{ N/m}$, $k_l = 0,04$, $v = 4,0 \text{ cm/s}$.

a) Pri raztežku $s = vt$, pri katerem velja $ks = F_l = k_l mg$, se klada premakne. Torej po času

$$t = \frac{k_l mg}{kv} = 4,9 \text{ s}.$$

[2 t.]

b)

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 0,8 \text{ mJ}.$$

Raztezek meri $s = vt = 19,6 \text{ cm}$ in prožnostna energija

$$W_{\text{pr}} = \frac{1}{2}ks^2 = 38,4 \text{ mJ}.$$

Celotna energija je

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pr}} = 39,2 \text{ mJ}.$$

[3 t.]

c) Ker na sistem ne deluje nobena sila, je hitrost težišča konstantna in enaka

$$v^* = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2} = 2,0 \text{ cm/s}.$$

[2 t.]

d) Ko vzmet ni raztegnjena, je prožnostna energija enaka 0, in kladi se gibljeta skozi ravnovesno lego z nasprotnima hitrostma glede na težišče sistema. Če hitrost prve klade v tem trenutku označimo z v_1 , je hitrost druge klade $v_2 = 2v^* - v_1$. Ker se celotna energija ohranja, je tedaj kinetična energija največja in enaka kar celotni energiji:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m(2v^* - v_1)^2 = W.$$

Dobimo kvadratno enačbo za v_1 :

$$2v_1^2 - 4v^*v_1 - \frac{2W}{m} + 4v^{*2} = 0,$$

z rešitvijo

$$v_1 = v^* \pm \sqrt{\frac{W}{m} - v^{*2}}.$$

Rešitev s + velja v primeru, ko se prva klada giblje naprej; pri rešitve z - pa se prva giblje nazaj, druga pa naprej in sicer z enako hitrostjo kot prva v primeru rešitve s +. Največja hitrost je torej

$$v_1 = v^* + \sqrt{\frac{W}{m} - v^{*2}} = 21,7 \text{ cm/s} \approx 22 \text{ cm/s}.$$

Nalogo je mogoče rešiti tudi tako, da se gibljemo skupaj s težiščem klad (v težiščnem sistemu). Za opazovalca v težišču kladi nihata druga proti drugi z nasprotno enakima hitrostma. Hitrosti sta po velikosti največji, ko gresta kladi skozi mirovno lego; označimo velikost te hitrosti z v' . Tedaj je vzmet nenapeta in je prožnostna energija enaka 0. Energijo v težiščnem sistemu dobimo tako, da od izračunane energije pri b) odštejemo kinetično energijo na račun gibanja težišča:

$$W^* = W - \frac{1}{2}(2m)v^{*2}.$$

Ko je vzmet nenapeta, je celotna energija kar kinetična energija obeh klad:

$$W^* = 2 \frac{1}{2}mv'^2, \quad v' = \sqrt{\frac{W^*}{m}} = \sqrt{\frac{W}{m} - v^{*2}}$$

Za opazovalca, ki miruje glede na tla, pa je hitrost večja za hitrost težišča: $v' + v^*$. Dobimo enak rezultat kot zgoraj.

Opomba: Hitro se lahko prepričamo, da v trenutku, ko se ena od klad ustavi, deluje vzmet na mirujočo klado s tolikšno silo, da premaga silo lepenja.

Račun z vrednostjo težnega pospeška 10 m/s^2 upoštevamo kot pravilen (dobimo $t = 5,0 \text{ s}$, $W = 40,8 \text{ mJ}$ in $v_1 = 22,1 \text{ cm/s} \approx 22 \text{ cm/s}$).

[5 t.]