**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Jadranska 19
1000 Ljubljana

Zavod RS za šolstvo
Poljanska 28
1000 Ljubljana

41. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

16. april 2005

8. razred

Na mizi imaš prijavni list, nalepko s šifro, tekmovalno polo formata A3 in pritožni list. Nalepko nalepi na prvo stran tekmovalne pole, prijavni list in pritožni list pa sta že opremljena s šifro. List z nalogami, prijavni list in pritožni list po tekmovanju odnesi s seboj. V primeru ugovora na vrednotenje izdelka **uporabi pritožni list**. Na prijavnem listu imaš uporabniško ime in geslo, ki ti omogočata, da takoj, ko bo tekmovalna komisija dosežke vnesla v strežnik, svoj dosežek najdeš na naslovu `http://www.dmfa.si`, povezava Rezultati tekmovanj ali preko mobilnega telefona, ki omogoča WAP, na naslovu `http://wap.dmfa.si`

Čas za reševanje je 120 minut.
Naloge rešuj na tekmovalni poli, priloženi list naj bo le v pomoč tvojemu razmišljanju. Pot do rezultata mora biti jasno in korektno predstavljena. Piši s črnilom berljivo in pregledno.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

1. naloga

Od traku elastike (dolg je a cm) smo odrezali petino dolžine.

a) Za koliko odstotkov moramo raztegniti daljši odrezek, da bo imel začetno dolžino a?
b) Krajši odrezani del smo raztegnili do prvotne dolžine a in elastika se ni strgala. Za koliko odstotkov smo ga raztegnili?

2. naloga

Marko ve, da za hojo od doma do železniške postaje potrebuje 24 minut, medtem ko to razdaljo preteče v 12 minutah. Marko mora ujeti vlak, ki s postaje odpelje ob 12.30, zato se z normalno hojo odpravi od doma ob 12.00. Med potjo se spomni, da je v vratih pozabil ključ, zato steče proti domu, vzame ključ in nato preteče tudi pot do postaje, kamor prispe točno ob 12.30.
Ob kateri uri se je spomnil, da je pozabil ključ?

3. naloga

V enakokrakem trikotniku z vrhom C je kot ob vrhu $20°$. Na kraku AC leži točka E, na kraku BC pa točka D, tako da meri kot $\sphericalangle CBE$ $60°$, kot $\sphericalangle CAD$ pa $30°$.
Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CED$. Nariši skico.

4. naloga

Ana in Blaž imata vsak svojo posodo z bonboni. V Anini posodi je 40 čokoladnih in 30 jagodnih bonbonov, v Blaževi pa 15 čokoladnih in 30 jagodnih bonbonov. Blaž iz Anine posode zagrabi 10 bonbonov in jih prestavi v svojo posodo. Če bi iz Anine posode prenesel v svojo posodo še 1 jagodni bonbon, bi bilo skupno število jagodnih bonbonov v Anini posodi in čokoladnih bonbonov v Blaževi posodi enako 50.
Koliko čokoladnih bonbonov in koliko jagodnih bonbonov je Blaž prenesel iz Anine posode v svojo posodo?

5. naloga

Za kateri vrednosti spremenljivke x je vrednost izraza $\left(x^2+1\right)^{(x+4)^2-(x-2)(x+2)}$ enaka 1?

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Jadranska 19
1000 Ljubljana

Zavod RS za šolstvo
Poljanska 28
1000 Ljubljana

41. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

16. april 2005

9. razred

Na mizi imaš prijavni list, nalepko s šifro, tekmovalno polo formata A3 in pritožni list. Nalepko nalepi na prvo stran tekmovalne pole, prijavni list in pritožni list pa sta že opremljena s šifro. List z nalogami, prijavni list in pritožni list po tekmovanju odnesi s seboj. V primeru ugovora na vrednotenje izdelka **uporabi pritožni list**. Na prijavnem listu imaš uporabniško ime in geslo, ki ti omogočata, da takoj, ko bo tekmovalna komisija dosežke vnesla v strežnik, svoj dosežek najdeš na naslovu `http://www.dmfa.si`, povezava Rezultati tekmovanj ali preko mobilnega telefona, ki omogoča WAP, na naslovu `http://wap.dmfa.si`

Čas za reševanje je 120 minut.
Naloge rešuj na tekmovalni poli, priloženi list naj bo le v pomoč tvojemu razmišljanju. Pot do rezultata mora biti jasno in korektno predstavljena. Piši s črnilom berljivo in pregledno.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

1. naloga

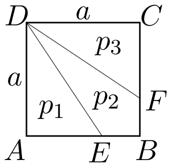
Rešitev enačbe $\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{(x-2)(x+2)}{3} = (x-1)^2 - \left(x^2-1\right) - \frac{55-x^2}{6}$ je začetna vrednost n linearne funkcije, katere graf gre skozi točko $A(-4,3)$.
Zapiši enačbo te linearne funkcije.

2. naloga

Mobilni operater nam ponuja tri različne pakete. V paketu **A** ni mesečne naročnine, zato pa minuta pogovora stane 25 SIT. Paket **B** ima mesečno naročnino 2000 SIT, vsaka minuta pogovora pa stane 5 tolarjev. Paket **C** ponuja pri mesečni naročnini 1000 SIT prvih 60 minut pogovora zastonj, vsaka naslednja minuta pa stane 10 tolarjev.
Spreminjanje cen pogovorov prikaži z grafi. Koliko minut najmanj in koliko minut največ lahko telefoniramo na mesec, da se splača odločiti za paket **C**?

3. naloga

Kvadrat $ABCD$ s stranico $a = 6$ cm bi radi razdelili na tri ploščinsko enake dele, kot kaže slika.
Izračunaj dolžini daljic AE in CF.

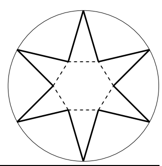


4. naloga

Alen, Boris, Cene in Črt so zbrali prihranke in kupili žogo. Alen je dal 40 % vrednosti žoge, Boris je prispeval tri sedmine zneska, ki so ga plačali ostali trije, Cene pa 25 % zneska ostalih treh. Najmlajši, Črt, je dal 2000 tolarjev. Kolikšna je bila cena žoge?

5. naloga

Zvezda na sliki je sestavljena iz pravilnega šestkotnika in šestih skladnih enakokrakih trikotnikov, ki imajo osnovnice na stranicah šestkotnika in kot ob vrhu 30°. Polmer krožnice je 1 enota.
Izračunaj ploščino zvezde.



REŠITVE NALOG **8. razred**

Vsako nalogo ocenimo z od 0 do 5 točk.
Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne.
Ob korektni uporabi nepravilnega delnega rezultata v naslednjih korakih rešitve ovrednotimo kot pravilne.

1. naloga

a) Daljši odrezek meri $\frac{4}{5}a$. 1t
Ostanek raztegnemo za $\frac{1}{5}a$. 1t
To predstavlja $\frac{\frac{1}{5}a}{\frac{4}{5}a} = \frac{1}{4} = 25$ % daljšega odrezka. 1t

b) Krajši odrezek raztegnemo za $\frac{4}{5}a$. 1t
To je: $\frac{\frac{4}{5}a}{\frac{1}{5}a} = 400$ % krajšega odrezka. 1t

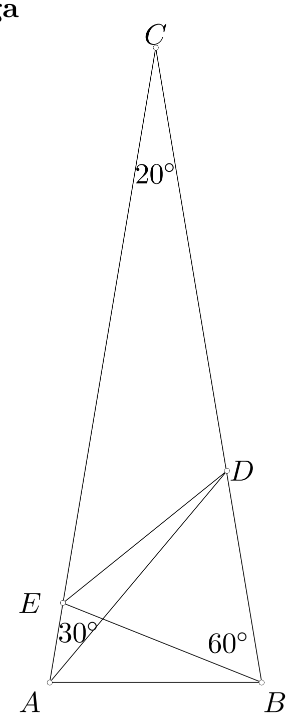
5t

2. naloga

- Drugič je od doma do postaje porabil 12 minut, torej je šel od doma ob 12.18. .... 1t
- Za pot, ki jo je prehodil, porabi dvakrat več časa kot za pretečeno pot. 1t
- S t označimo čas, porabljen od odhoda od doma, do takrat, ko je ugotovil, da je pozabil ključ:
  $t + \frac{t}{2} = 18$ min 1t
  $t = 12$ min 1t
- Na ključ se je spomnil ob 12.12. .... 1t

5t

3. naloga



- Skica 1t
- Ker je $\triangle ABC$ enakokrak, velja
  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$
  Torej je $\sphericalangle EBA = 80° - 60° = 20°$.
  V trikotniku $\triangle ABE$ je kot
  $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle EBA = 80°$.
  Zato je $\triangle ABE$ enakokrak z vrhom B in $|AB| = |EB|$. 1t
- Ker je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = 50°$,
  je $\sphericalangle ADB = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle DBA = 50°$.
  Torej je tudi $\triangle ABD$ enakokrak z vrhom B in $|AB| = |DB|$. 1t
- Trikotnik $\triangle EBD$ je enakostraničen,
  saj je $|EB| = |DB|$ in $\sphericalangle DBE = 60°$. 1t
- $\sphericalangle CED = 180° - \sphericalangle AEB - \sphericalangle BED$
  $\sphericalangle CED = 180° - 80° - 60° = 40°$ 1t

5t

4. naloga

- Stanje na začetku:

	Ana	Blaž
čokoladni	40	15
jagodni	30	30

  Blaž vzame iz Anine posode x čokoladnih bonbonov in $10-x$ jagodnih bonbonov. 1t

- Novo stanje:

	Ana	Blaž
čokoladni	$40-x$	$15+x$
jagodni	$20+x$	$40-x$

  ....1t

- Če bi Blaž vzel še en jagodni bonbon, bi Ana imela $19+x$ jagodnih bonbonov, Blaž pa $15+x$ čokoladnih bonbonov. 1t
- $50 = 19 + x + 15 + x$..1t
  $x = 8$
- Prenesel je 8 čokoladnih bonbonov in 2 jagodna bonbona..1t

5t

5. naloga

Realno število a^b je enako 1, če je $a = 1$ in b poljubno realno število, ali pa $a \neq 0$ in $b = 0$, zato ločimo dve možnosti:

a) Osnova potence je enaka 1:..1t
Rešitev enačbe $x^2 + 1 = 1$ je $x = 0$. 1t

b) Stopnja potence je enaka 0,
torej je $(x+4)^2 - (x-2)(x+2) = 0$. 1t
Ureditev enačbe: $8x + 20 = 0$. 1t
Rešitev $x = -\frac{5}{2}$ 1t
ustreza, saj osnova nikoli ni enaka 0.

5t

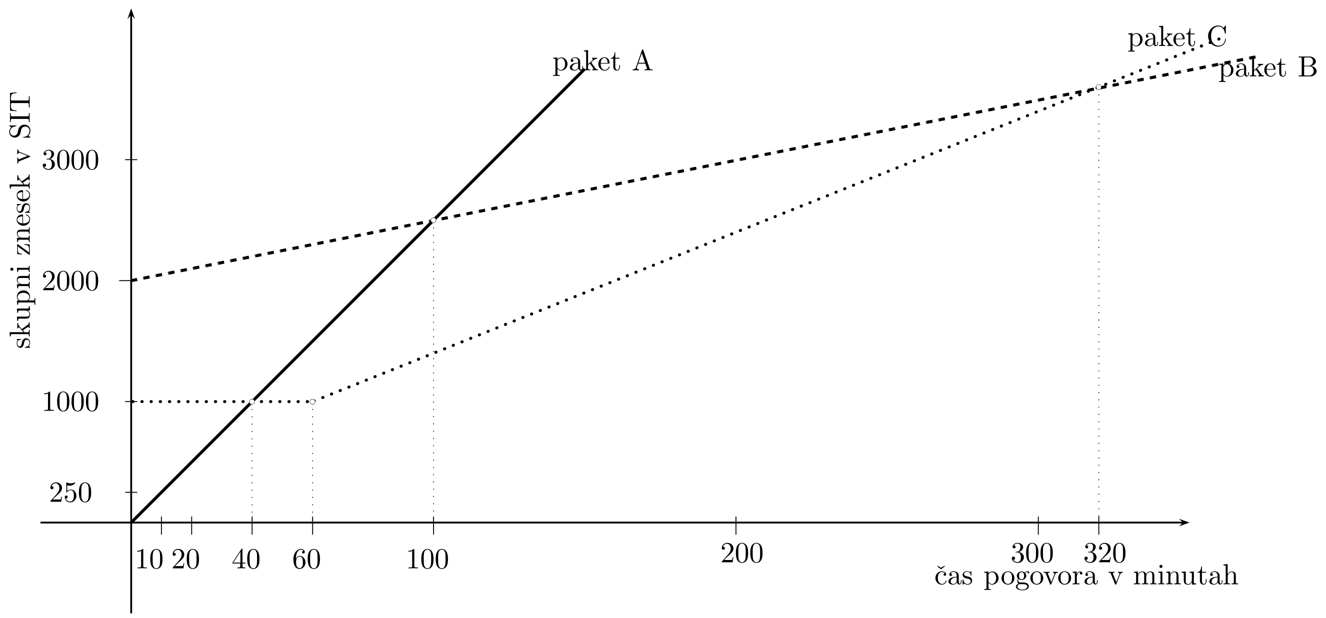
1. naloga

- Ureditev enačbe:
  $3x^2 + 30x + 75 - 2x^2 + 8 = 6x^2 - 12x + 6 - 6x^2 + 6 - 55 + x^2$ 1t
  $42x = -126$
- Rešitev enačbe $x = -3$ 1t
- Enačba premice z upoštevanjem začetne vrednosti $y = kx - 3$ 1t
  $3 = (-4)k - 3$
  $k = -\frac{3}{2}$ 1t
- Zapis enačbe $y = -\frac{3}{2}x - 3$. 1t

5t

2. naloga

- V paketu A plačamo za x minut pogovora $25x$ SIT, $z_A(x) = 25x$. 1t
  v paketu B pa za x minut pogovora $5x + 2000$ SIT, $z_B(x) = 5x + 2000$. 1t
  Znesek v paketu C se prvih 60 minut ne spreminja in je 1000 SIT,
  nato pa se vsako minuto poveča za 10 SIT, $z_C(x) = \begin{cases} 1000\ ;\ x < 60 \\ 1000 + 10\cdot(x-60)\ ;\ x \geq 60 \end{cases}$ 1t
  Spreminjanje zneskov upodobimo z grafi.
  (Za vsak graf ali pravilno zapisan pogoj učenec dobi 1 točko.)



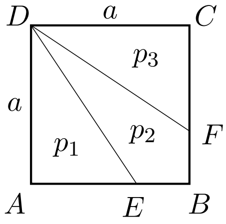
Pojasnilo:

- Ker je cena 60 minut pogovora v paketu A enaka 1500 SIT, v paketu C pa le 1000 SIT, sta ceni x minut pogovorov v paketih A in C lahko enaki le, če je $x < 60$ in tedaj mora veljati $25x = 1000$ oz. $x = 40$. Cena pogovorov v paketu C je ugodnejša od cene v paketu A od vključno 40 minut pogovorov dalje.

- Ker je mesečna naročnina na paket B enaka 2000 SIT, sta ceni x minut pogovorov v paketih B in C lahko enaki le, če je $x > 60$ in tedaj mora veljati $1000 + 10(60 - x) = 5x + 2000$ oz. $x = 320$. To pomeni, da je cena pogovorov v paketu C ugodnejša do vključno 320 minut pogovorov.
- Na mesec moramo govoriti od 40 minut 1t
  do 320 minut, da bi se splačalo odločiti za paket C. 1t

5t

3. naloga



- Označimo $|AE| = x$ in $|CF| = y$
  $p_1 = \frac{ax}{2}$
- Ker je kvadrat razdeljen na 3 enake dele, velja $p_1 = \frac{a^2}{3}$. 1t
  $p_1 = \frac{ax}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$ 1t
- Enak sklep velja za y: $p_3 = \frac{a^2}{3}$ 1t
  $p_3 = \frac{ay}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}a$ 1t
  $x = y = 4$ cm. 1t

(Če učenec izračuna x in namesto izračuna za y napiše $x = y$ zaradi simetrije, dobi vse točke.)
ali druga možnost:

- Označimo $|AE| = x$ in $|CF| = y$
  $p_1 = \frac{ax}{2}$ in $p_3 = \frac{ay}{2}$ .... (1t)
  $p_2 = a^2 - \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2}$ .... (1t)
- $p_1 = p_3 \Rightarrow x = y$ .... (1t)
- $p_1 = p_2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$ .... (1t)
- $x = y = 4$ cm .... (1t)

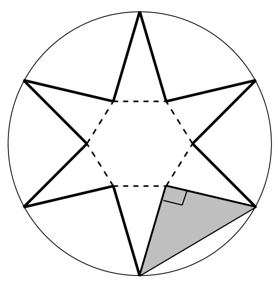
5t

4. naloga

- Žoga stane x SIT.
  Alen prispeva 40 %, torej $0{,}4x$ SIT, Črt pa 2000 SIT. 1t
- Razmerje Borisovega prispevka in prispevka ostalih je 3 : 7,
  torej je Borisov delež $\frac{3}{10}$ celotnega zneska oziroma $0{,}3x$ SIT. 1t
- Ker je razmerje Cenetovega prispevka proti ostalim enako 1 : 4,
  da Cene $\frac{1}{5}$ celotnega zneska oziroma $0{,}2x$ SIT. 1t
- Zapis enačbe $0{,}4x + 0{,}3x + 0{,}2x + 2000 = x$. 1t
  $0{,}1x = 2000$
  $x = 20000$
- Cena žoge je bila 20000 SIT. 1t

5t

5. naloga



- Vrhovi zvezde tvorijo pravilni šestkotnik, ki
  ima stranico enako polmeru krožnice.
  Ploščina tega šestkotnika je $p_1 = \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 1t
- Ker je kot ob vrhu zvezde enak 30°, je kot ob osnovnici kraka zvezde enak 75°, torej se kraka zvezde sekata pod kotom
  $360° - 120° - 2 \cdot 75° = 90°$ 1t
- Ploščina osenčenega trikotnika je:
  $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}$ 1t
- Ploščina zvezde je:
  $p = p_1 - 6p_2$ 1t
- $p = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ 1t

5t