Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Regijsko tekmovanje, 6. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 8. razred

Čas reševanja: **90 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2

A1. Utrdba ima dovolj zalog, da nahrani vse prebivalce, za 90 dni. Po 20 dneh prispe v utrdbo še 600 vojakov in tako ostane hrane samo še za 50 dni. Koliko ljudi je bilo v utrdbi na začetku?

(**A**) 900 (**B**) 3000 (**C**) 600 (**D**) 1500 (**E**) 1200

A2. Katero naravno število n zadošča enačbi $\sqrt{27^4} \cdot (3^{2020})^2 : 27 : \sqrt{9^{2019}} = 3^{2n}$?

(**A**) nobeno (**B**) 1011 (**C**) 1012 (**D**) 2020 (**E**) 2024

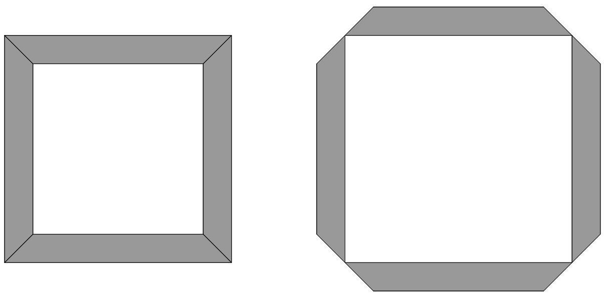
A3. Ko so les posekali, je vseboval $40\,\%$ suhe snovi in $60\,\%$ vode. Po sušenju je les vseboval le še $50\,\%$ vode. Kolikšna je bila masa lesa po sušenju, če je pred sušenjem tehtal 2250 kg?

(**A**) 1900 kg (**B**) 2020 kg (**C**) 1800 kg (**D**) 1750 kg (**E**) 900 kg

A4. Zmnožek števk v letnici 2022 je 0. V koliko letnicah se to zgodi med letoma 2000 in 2999, vključno s tema letnicama?

(**A**) 300 (**B**) 271 (**C**) 243 (**D**) 200 (**E**) 169

A5. Kvadratno sliko s ploščino $2{,}25$ dm^2 uokvirimo z okvirjem, sestavljenim iz štirih skladnih enakokrakih trapezov. Če te trapeze obrnemo, kot kaže slika, lahko uokvirimo kvadratno sliko, ki ima $1{,}75$ dm^2 večjo ploščino od prve. Za koliko centimetrov se razlikujeta dolžini osnovnic enega trapeza?



(**A**) 2 cm (**B**) 5 cm (**C**) 1 dm (**D**) 2 dm (**E**) 5 dm

A6. Palindrom je število, ki se v obe smeri bere enako, na primer števili 313 in 791197. Kolikšna je vsota števk v najmanjšem palindromu, ki je večji od 2022?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 16

B1. V večkotniku iz izbranega oglišča poteka skupaj 25 stranic in diagonal. Koliko je vsota velikosti notranjih kotov tega večkotnika?

B2. Izračunaj vrednost izraza.

$$5^2 \cdot \left(\frac{(5^n)^2 \cdot 125}{(5^n)^5} \cdot \frac{25 \cdot (5^3)^n}{5^5}\right)^5 =$$

58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Regijsko tekmovanje, 6. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

Čas reševanja: **90 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2

A1. V kvadru $ABCDEFGH$ je kot med ploskovno diagonalo AC in telesno diagonalo AG velik $30°$. Natančno koliko cm meri ploskovna diagonala AC, če meri rob $|CG| = 4$ cm?

(**A**) 8 cm (**B**) $8\sqrt{3}$ cm (**C**) $4\sqrt{3}$ cm (**D**) $4\sqrt{2}$ cm (**E**) 12 cm

A2. Volk in zajec sta na ravni stezi. Zajec je 10 zajčjih skokov oddaljen od volka. Ko se volk požene v lov za zajcem, ta hkrati začne po stezi bežati pred volkom. Zajec napravi 3 skoke v sekundi, volk pa 2, vendar sta 2 volčja skoka enako dolga kot 5 zajčjih. Koliko skokov bo napravil zajec na begu do tedaj, ko ga bo volk ujel?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

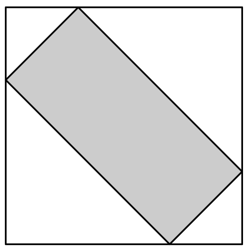
A3. Na krožnico narišemo 8 točk, ki tvorijo oglišča pravilnega osemkotnika. Med njimi naključno izberemo nekaj točk. Najmanj koliko jih moramo izbrati, da bodo 4 izmed izbranih zagotovo tvorile oglišča pravokotnika?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

A4. Kolikšen je ostanek pri deljenju števila $2^{2022} + 1$ z 9?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 9

A5. Iz kvadrata izrežemo pravokotnik, ki ima stranice vzporedne z diagonalama (slika). Ploščina ostanka je $18\ \mathrm{m}^2$. Kolikšna je dolžina diagonale izrezanega pravokotnika?



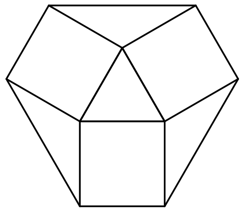
(**A**) 2 m (**B**) $3\sqrt{2}$ m (**C**) 6 m (**D**) $6\sqrt{2}$ m (**E**) 9 m

A6. Jure je pravilno poenostavil izraz $3^{n+2} \cdot (-3)^{2n-1} \cdot (-3)^{2n+2} - 2 \cdot 3^{5n+3}$. Katerega od navedenih zapisov je dobil Jure?

(**A**) 1 (**B**) 3^{-10n-6} (**C**) 9^{5n+3} (**D**) -3^{5n+4} (**E**) -3^{5n+3}

B1. Poišči vse pare naravnih števil a, b, kjer je $a > b$, da bo razlika njunih kvadratov največje dvomestno naravno število.

B2. Nad vsako stranico enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice $10 \mathrm{~cm}$ je narisan kvadrat. Če povežemo še oglišča kvadratov, ki niso oglišča trikotnika, dobimo šestkotnik (slika). Natančno izračunaj obseg in ploščino tega šestkotnika.



58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Regijsko tekmovanje, 6. april 2022

Rešitve nalog za 8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6
D	C	C	B	B	A

A1. Naj bo x število ljudi v utrdbi na začetku. Po 20 dneh je bilo v utrdbi še $(90-20)x$ zalog hrane. To je porabilo $x+600$ ljudi v 50 dneh. Zapišemo enačbo $70x = 50(x+600)$. Rešitev enačbe je $x = 1500$, kar pomeni, da je bilo na začetku v utrdbi 1500 ljudi.

A2. Poenostavimo levo stran enačbe: $\sqrt{27^4} \cdot (3^{2020})^2 : 27 : \sqrt{9^{2019}} = \sqrt{(27^2)^2} \cdot 3^{4040} : 3^3 : \sqrt{(3^2)^{2019}} = 27^2 \cdot 3^{4040} : 3^3 : \sqrt{(3^{2019})^2} = (3^3)^2 \cdot 3^{4040} : 3^3 : 3^{2019} = 3^{4046} : 3^3 : 3^{2019} = 3^{4043} : 3^{2019} = 3^{2024}$. Potenci z enako osnovo sta enaki, če imata enaka eksponenta, zato je $2n = 2024$ in $n = 1012$.

A3. Posekan les je vseboval $40\,\% \cdot 2250$ kg suhe snovi oziroma 900 kg in $60\,\% \cdot 2250$ kg vode oziroma 1350 kg. Po sušenju je les vseboval toliko vode kot suhe snovi, to je 900 kg. Zato je masa lesa po sušenju 1800 kg.

A4. Iščemo števila med 2000 in 2999 (vključno z njima), ki imajo vsaj eno števko enako 0. Števko 0 na mestu stotic ima 100 števil (od 2000 do 2099). Števko 0 na mestu desetic ima 100 števil (2000, 2001, ..., 2009, 2100, 2101, ..., 2109, ..., 2900, 2901, ...,2909), vendar je med njimi prvih 10 takšnih, ki imajo števko 0 že na mestu stotic (2000, 2001, ..., 2009). Števko 0 na mestu enic ima ravno tako 100 števil (2000, 2010, ..., 2090, 2100, 2110, ..., 2190, ..., 2900, 2910, ..., 2990), a je med njimi prvih 10 takšnih, ki imajo števko 0 na mestu stotic (2000, 2010, ..., 2090) in potem še 9 takšnih, ki imajo števko 0 na mestu desetic (2100, 2200, ..., 2900). Vseh števil, ki imajo vsaj eno števko enako 0, je $100 + (100-10) + (100-10-9) = 271$.

Rešitev 2: Opazujemo 1000 števil. Nobene števke 0 nima $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ števil. Torej je rešitev: $1000 - 729 = 271$.

A5. Ker je ploščina kvadratne slike enaka $2{,}25$ dm^2, je stranica slike dolga $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ dm in je enaka krajši osnovnici trapeza. Ko trapeze obrnemo, lahko uokvirimo sliko s ploščino $2{,}25 + 1{,}75 = 4$ dm^2. Stranica večje slike je $\sqrt{4} = 2$ dm in je enaka daljši osnovnici trapeza. Zato se dolžini osnovnic trapeza razlikujeta za $2 - 1{,}5 = 0{,}5$ dm oziroma 5 cm.

A6. Najmanjši palindrom, ki je večji od 2022, je 2112. Torej je vsota števk 6.

B1. Število stranic in diagonal iz izbranega oglišča določa preostalih 25 oglišč. Iskani večkotnik je 26-kotnik. Vsota velikosti notranjih kotov 26-kotnika je $180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (26-2) = 4320°$.

Ugotovitev, da gre za 26-kotnik. . . . . 2 točki
Uporaba formule za izračun vsote velikosti notranjih kotov. . . . . 2 točki
Izračunana vsota. . . . . 2 točki

B2.

$$5^2 \cdot \left(\frac{(5^n)^2 \cdot 125}{(5^n)^5} \cdot \frac{25 \cdot (5^3)^n}{5^5} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot \left(\frac{5^{2n} \cdot 5^3}{5^{5n}} \cdot \frac{5^2 \cdot 5^{3n}}{5^5} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot \left(\frac{5^{2n+3}}{5^{5n}} \cdot \frac{5^{2+3n}}{5^5} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot \left(\frac{5^{2n+3} \cdot 5^{2+3n}}{5^{5n} \cdot 5^5} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot \left(\frac{5^{2n+3+2+3n}}{5^{5n+5}} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot \left(\frac{5^{5n+5}}{5^{5n+5}} \right)^5 =$$

$$= 5^2 \cdot 1^5 = 25$$

Upoštevanja pravila za potenciranje potenc, npr.: $(5^n)^2 = 5^{2n}$ .... 1 točka
Zapis števil 25 ali 125 kot potenc z osnovo 5. .... 1 točka
Uporaba pravila za množenje potenc. .... 1 točka
Uporaba pravila za deljenje potenc. .... 1 točka
Zapis zmnožka ulomkov z enim ulomkom. .... 1 točka
Izračunan rezultat. .... 1 točka

58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Regijsko tekmovanje, 6. april 2022

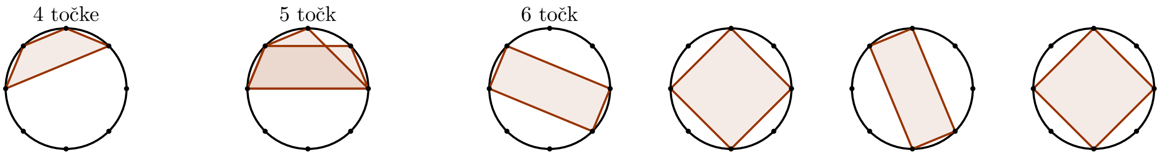
Rešitve nalog za 9. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	B	C	B	C	D

A1. Trikotnik ACG je polovica enakostraničnega trikotnika. Tako je dolžina telesne diagonale 8 cm. Dolžino ploskovne diagonale izračunamo s Pitagorovim izrekom.

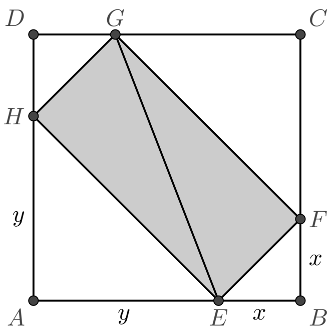
A2. Volk naredi dva skoka na sekundo oziroma 5 zajčjih skokov na sekundo. Naj bo t čas, v katerem volk ujame zajca. Razdalja, ki jo naredi volk, je enaka razdalji, ki jo naredi zajec, pri čemer upoštevamo še njegovo prednost: $10 + \frac{3}{s} \cdot t = \frac{5}{s} \cdot t$ in $t = 5$ s. Zajec naredi $\frac{3}{s} \cdot 5s = 15$ skokov, ko ga ujame volk.

A3. Če naključno izberemo 4 zaporedne točke, so to oglišča trapeza, ki ni pravokotnik. Tudi če izberemo 5 zaporednih točk, ne moremo štirih povezati v pravokotnik. Preverimo vse možnosti pri izboru 6 točk in opazimo, da je ne glede na izbor vedno mogoče izbrati oglišča pravokotnika.



A4. Zapišimo prvih deset števil $2^n + 1$, pri čemer je n naravno število: $3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025$ ... Določimo še ostanke pri deljenju teh števil z 9: $3, 5, 0, 8, 6, 2, 3, 5, 0, 8$... Opazimo, da se ostanki od šeste potence naprej ponavljajo. Ker je število 2022 večkratnik števila 6, je ostanek števila $2^{2022} + 1$ enak šestemu ostanku, to je 2.

A5. Delčka na stranici kvadrata označimo z x in y. Ploščina ostankov je vsota ploščin kvadratov, zato velja: $x^2 + y^2 = 18$. Stranici pravokotnika merita: $x\sqrt{2}$ in $y\sqrt{2}$. Sledi $|EG|^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) = 36$ in zato $|EG| = 6$.



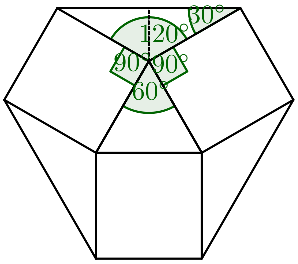
A6. $3^{n+2} \cdot (-3)^{2n-1} \cdot (-3)^{2n+2} - 2 \cdot 3^{5n+3} = -3^{5n+3} - 2 \cdot 3^{5n+3} = -3 \cdot 3^{5n+3} = -3^{5n+4}$

B1. Označimo naravni števili z a in b. Razlika njunih kvadratov je 99: $a^2 - b^2 = 99$. Razliko kvadratov zapišemo kot: $(a+b)(a-b) = 99$. Sedaj razčlenimo na prafaktorje število 99 in zapišemo vse različne zmnožke dveh števil, ki dajo rezultat 99: $99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$. Tako dobimo 3 enačbe: $(a+b)(a-b) = 1 \cdot 99$, $(a+b)(a-b) = 3 \cdot 33$ in $(a+b)(a-b) = 9 \cdot 11$. Vsako enačbo reši svoj par, ki pa so: $(50, 49)$, $(18, 15)$ in $(10, 1)$.

Ugotovitev, da je 99 največje dvomestno število. . . . . 1 točka

Razcep razlike kvadratov: $(a+b)(a-b)=99$. .... 1 točka
Zapis različnih zmnožkov števila 99: $99=1\cdot 99=3\cdot 33=9\cdot 11$. .... 1 točka
Rešitev enačbe $(a+b)(a-b)=1\cdot 99$ je $a=50$ in $b=49$. .... 1 točka
Rešitev enačbe $(a+b)(a-b)=3\cdot 33$ je $a=18$ in $b=15$. .... 1 točka
Rešitev enačbe $(a+b)(a-b)=9\cdot 11$ je $a=10$ in $b=1$. .... 1 točka

B2. Ploščina enakostraničnega trikotnika s stranico 10 cm je $25\sqrt{3}$ cm^2. Ploščine treh enakokrakih trikotnikov so enake ploščini enakostraničnega trikotnika (zaradi velikosti kotov; glej sliko). Tako je ploščina šestkotnika, $p=(100\sqrt{3}+3\cdot 100)$ cm^2 ali $p=100(\sqrt{3}+3)$ cm^2. Obseg je vsota dolžin stranic šestkotnika, med katerimi so tri dolžine 10 cm (stranice kvadrata) in šest višin enakostraničnega trikotnika, $6\cdot\frac{(10\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$ cm. Obseg šestkotnika je tako, $o=30(\sqrt{3}+1)$ cm.



Šeskotnik je sestavljen iz treh kvadratov, enakostraničnega trikotnika s ploščino $25\sqrt{3}$ cm^2 in treh enakokrakih trikotnikov. .... 1 točka
Ugotovitev, da imajo enakokraki trikotniki enako ploščino kot enakostranični trikotnik. 1 točka
Izračunana ploščina šestkotnika. .... 1 točka
Ugotovitev, da je dolžina polovica osnovnice enakokrakega trikotnika enaka višini enakostraničnega trikotnika šestkotnika. .... 1 točka
Obseg šestkotnika je vsota dolžin treh stranic kvadrata in šestih višin enakostraničnega trikotnika. .... 1 točka
Izračunan obseg. .... 1 točka