Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Nova Gorica, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

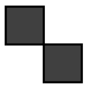
Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Določi vsa praštevila p in q, za katera je tudi število $2^2 + p^2 + q^2$ praštevilo.

2. Poišči vsa realna števila x in y, za katera velja $x + y^2 = xy + 1$ in $xy = 4 + y$.

3. V šestkotniku $ABCDEF$ velja $\angle BAF = 150°$, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$, $|AC| = |BC|$, trikotnik ABC je podoben trikotniku ADE in trikotnik BCD je podoben trikotniku DEF. Izračunaj razmerje dolžin daljic AB in AF.

4. Tabela 4×4 je razdeljena na 16 kvadratkov. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike

 (ploščico lahko zasukamo),

ki pokrijejo vsaka po dve polji. Najmanj koliko ploščic moramo postaviti na tabelo, da bo imelo vsako nepokrito polje vsaj eno sosednje polje pokrito? (Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.)

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Nova Gorica, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa naravna števila m in n, za katera je vsota največjega skupnega delitelja in najmanjšega skupnega večkratnika enaka 101.

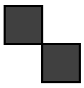
2. Dokaži, da za vsak par realnih števil x in y velja neenakost

$$|x+y|+|x+1|+|y+1| \geq 2.$$

Pri katerih številih x obstaja tako število y, da velja $|x+y|+|x+1|+|y+1| = 2$?

3. Naj bo P taka točka znotraj trikotnika ABC, da je $\angle CBP = \angle PAC$. Presečišče premice AP s stranico BC označimo z D, presečišče premice BP s stranico AC pa z E. Trikotnikoma ADC in BEC očrtani krožnici se sekata v točkah C in F. Pokaži, da je premica CP simetrala kota DFE.

4. Tabela 7×7 je razdeljena na 49 kvadratkov. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike

 (ploščico lahko zasukamo),

ki pokrijejo vsaka po dve polji. Najmanj koliko ploščic moramo postaviti na tabelo, da bo imelo vsako nepokrito polje vsaj eno sosednje polje pokrito? (Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.)

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Nova Gorica, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

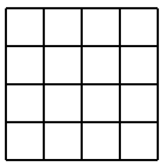
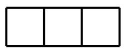
Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Določi vsa cela števila x, za katera je število $9x^2-40x+39$ potenca praštevila. (Naravno število m je potenca praštevila, če je $m = p^a$ za neko praštevilo p in nenegativno celo število a.)

2. Poišči vse polinome P s celimi koeficienti, za katere velja: za vsako celo število a in vsako praštevilo p, ki deli $P(a)$, velja, da p deli a.

3. Točka O_1 je središče krožnice $\mathcal{K}_1$ in leži na krožnici $\mathcal{K}_2$ s središčem O_2. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in B. Krožnica $\mathcal{K}_1$ seka daljico O_1O_2 v točki C. Premica BC seka krožnico $\mathcal{K}_2$ v točkah B in D, premica AD pa seka krožnico $\mathcal{K}_1$ v točkah A in E. Naj bo F razpolovišče daljice AE. Dokaži, da premici O_1A in O_1D razdelita kot CO_1F na tri enake dele.

4. Za katera naravna števila $n \geq 3$ je možno tabelo razsežnosti $n \times n$ brez prekrivanja pokriti s ploščicami

 in  ?

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Nova Gorica, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

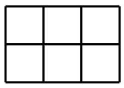
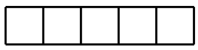
Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Ali obstaja celo število n, za katerega so vse ničle polinoma $p(x) = x^4 - 2011x^2 + n$ cela števila?

2. Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja $f(x+y) = f(x-y) + 2f(y)\cos x$ za vsa realna števila x in y.

3. Dan je konveksen štirikotnik $ABCD$, točki E in F na stranici AB ter točka G na stranici CD, da so štirikotniki $ABCG$, $AFCD$ in $EFCG$ tetivni. Dokaži, da je $|AE| = |FB|$ natanko tedaj, ko sta stranici AB in CD vzporedni.

4. Za katera naravna števila $n \geq 5$ je možno tabelo razsežnosti $n \times n$ brez prekrivanja pokriti s ploščicami

 in ?

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Nova Gorica, 16. april 2011

Rešitve nalog

I/1. Če je (p, q) rešitev naloge, je tudi (q, p) rešitev. Zato je dovolj obravnavati primer $p \leq q$. Očitno $p = q = 2$ ni rešitev. Če sta p in q lihi praštevili, je število $2^2 + p^2 + q^2$ sodo in večje od 2, zato ni praštevilo. Torej je $p = 2$.

Ugotovimo, kdaj je število $8 + q^2$ praštevilo. Če je $q = 3$, je $8 + q^2 = 17$ praštevilo. Sicer je s 3 deljivo eno izmed števil $q - 1$ oziroma $q + 1$, zato 3 deli $9 + (q - 1)(q + 1) = 8 + q^2$ in ni praštevilo.

Število $2^2 + p^2 + q^2$ je praštevilo le, če je $p = 2$ in $q = 3$ ali $p = 3$ in $q = 2$.

Ugotovitev, da v primeru, ko sta števili p in q lihi, $2^2 + p^2 + q^2$ ni praštevilo . . . 1 točka
Sklep, da je $p = 2$ ali $q = 2$ . . . 1 točka
V primeru $p = q = 2$ ni rešitev . . . 1 točka
Rešitev $p = 2$, $q = 3$ . . . 1 točka
Rešitev $p = 3$, $q = 2$ . . . 1 točka
Sklep, da $3 \mid 8 + q^2$ v primeru, ko praštevilo q ni deljivo s 3 . . . 2 točki

I/2. Iz prve enačbe sledi $x(1 - y) = 1 - y^2$ oziroma $(1 - y)(x - 1 - y) = 0$. Če je $y = 1$, ta enačba velja, iz druge pa sledi $x = 5$. V primeru $y \neq 1$ dobimo $x = 1 + y$. Skupaj z drugo enačbo tedaj velja $(1 + y)y = 4 + y$ oziroma $y^2 = 4$. Od tod sledi $y = 2$ ali $y = -2$.

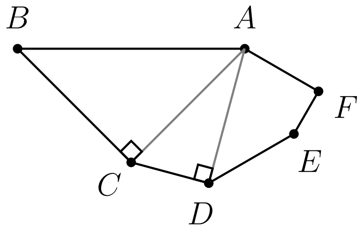
Enačbi veljata za števili $x = 5$, $y = 1$, števili $x = 3$, $y = 2$ in števili $x = -1$, $y = -2$.

Razcep $(1 - y)(x - 1 - y) = 0$ . . . 1 točka
Sklep, da je $y = 1$ ali $x = 1 + y$ . . . 1 točka
Rešitev $x = 5$, $y = 1$ . . . 1 točka
V primeru $y \neq 1$ zapis ene enačbe, v kateri nastopa le spremenljivka y . . . 1 točka
Izpeljava $y^2 = 4$ . . . 1 točka
Rešitev $y = 2$, $x = 3$ . . . 1 točka
Rešitev $y = -2$, $x = -1$ . . . 1 točka

2. način Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{4}{y} + 1$ in vstavimo v prvo, še prej pa preverimo, da v primeru $y = 0$ ne dobimo nobene rešitve. Tako imamo $\frac{4}{y} + 1 + y^2 = 5 + y$ oziroma $y^3 - y^2 - 4y + 4 = 0$. Preoblikujemo v $y^2(y - 1) - 4(y - 1) = 0$ oziroma $(y - 1)(y^2 - 4) = 0$. Od tod sledi $y = 1$ ali $y^2 = 4$, torej $y = 1$ ali $y = 2$ ali $y = -2$.

Enačbi veljata za števili $x = 5$, $y = 1$, števili $x = 3$, $y = 2$ in števili $x = -1$, $y = -2$.

Izražava $x = \frac{4}{y} + 1$ ali $y = \frac{4}{x-1}$ . . . 1 točka
Utemeljitev, da je $y \neq 0$ oziroma $x \neq 1$ . . . 1 točka
Zapis ene enačbe, v kateri nastopa le spremenljivka y ali le x . . . 1 točka
Razcep $(y - 1)(y^2 - 4) = 0$ . . . 1 točka
Rešitev $x = 5$, $y = 1$ . . . 1 točka
Rešitev $y = 2$, $x = 3$ . . . 1 točka
Rešitev $y = -2$, $x = -1$ . . . 1 točka



I/3. Označimo $|AB| = a$. Ker je ABC enakokrak pravokotni trikotnik z vrhom C, je $|AC| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ in $\angle ABC = \angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Zaradi podobnosti trikotnikov ADE in ABC sledi $\angle AED = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$ in $|DE| = |AE|$.
Iz podobnosti trikotnikov BCD in DEF sklepamo $\angle BCD = \angle DEF$ in $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|DE|}{|EF|}$. Torej je

$$\angle ACD = \angle BCD - \frac{\pi}{2} = \angle DEF - \frac{\pi}{2} = \angle AEF$$

in

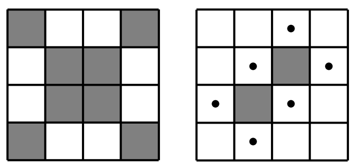
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|DE|}{|EF|} = \frac{|AE|}{|EF|},$$

zato sta si trikotnika ACD in AEF podobna in velja še $\angle CAD = \angle EAF$.
Iz

$$150^\circ = \angle BAF = \angle BAC + \angle CAD + \angle CAE + \angle EAF = \frac{\pi}{2} + 2\angle CAD$$

sledi $\angle CAD = 30^\circ$. Tako je trikotnik CAD polovica enakostraničnega trikotnika in je $|AD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Trikotnik ADE je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|AE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Upoštevamo še, da je trikotnik AEF polovica enakostraničnega, in izračunamo $|AF| = \frac{|AE|\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{8}$. Dobili smo $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{8}{3}$.

Sklep $|AC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .... 1 točka
Zapis enakosti kotov $\angle BCD = \angle DEF$ ali razmerja $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ .... 1 točka
Ugotovitev: trikotnika ACD in AEF sta si podobna .... 1 točka
Izračun $\angle CAD = 30^\circ$ .... 1 točka
Izračun $|AD| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ (ali zapis $|AD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}$) .... 1 točka
Izračun $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (ali zapis $|AE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}}$) .... 1 točka
Zaključek $|AB|\colon |AF| = \frac{8}{3}$ .... 1 točka



I/4. Na tabelo lahko položimo štiri ploščice, kot prikazuje prva slika. Vsako nepokrito polje ima vsaj eno sosednje polje pokrito. Utemeljimo, da z manj kot štirimi ploščicami tega ne moremo narediti. Opazujmo ploščico, ki leži na tabeli. Označimo še polja, ki so sosednja pokritim. V vsaki vrstici so največ tri polja takšna, da so bodisi pokrita bodisi sosednja pokritim, in vsa ta polja so zaporedna. Enako velja za stolpce in diagonale. Tabela ima štiri vogalna polja. Če bi jo lahko pokrili z največ tremi ploščicami tako, da bi bilo vsako polje pokrito ali sosednje pokritemu, bi morala ena izmed treh ploščic pokriti oziroma biti sosedna vsaj dvema vogalnima poljema, kar ni možno.

Primer tabele s štirimi ploščicami, ki zadošča pogojem .... 2 točki
Opažanje, da je problem pokriti vogalna polja .... 2 točki
Opažanje, da je ena ploščica sosednja ali pokrije največ eno vogalno polje .... 1 točka
Utemeljitev, da je ena ploščica sosednja ali pokrije največ eno vogalno polje .... 1 točka
Zaključek, da pogojem ne moremo zadostiti s tremi ploščicami .... 1 točka

V kolikor tekmovalec pristopi k dokazu, da tri ploščice ne zadoščajo, vendar tega dela ne uspe dokazati in ne uspe priti do delnih točk po zgornjem kriteriju, lahko prejme za ta del rešitve največ dve točki za enega izmed naslednjih sklepov:
Ugotovitev, da je ena ploščica premalo . . . . 1 točka
Utemeljitev, da dve ploščici ne zadoščata . . . . 2 točki

II/1. Naj bo d največji skupni delitelj števil m in n. Tedaj je $m = dm_1$ in $n = dn_1$, števili m_1 in n_1 pa sta si tuji. Najmanjši skupni večkratnik m in n je dm_1n_1. Velja

$$101 = d + dm_1n_1 = d(1 + m_1n_1).$$

Ker je $1 + m_1n_1 \geq 2$ in je 101 praštevilo, je edina možnost $d = 1$ in $m_1n_1 = 100$. Števili $m = m_1$ in $n = n_1$ sta si tuji. Tisto, ki je deljivo z 2, je zato deljivo s 4. Tisto, ki je deljivo s 5, je zato deljivo s 25. Možni pari rešitev so $(1, 100)$, $(4, 25)$, $(25, 4)$ in $(100, 1)$.
Zapis $m = dm_1$, $n = dn_1$ . . . . 1 točka
Enačba $101 = d + dm_1n_1$ . . . . 1 točka
Ugotovitev $d = 1$ (oziroma, števili m in n sta si tuji) . . . . 1 točka
Vse rešitve . . . . 3 točke
(V kolikor ni navedenih vseh rešitev, se prizna ena točka za eno izmed rešitev $(1, 100)$ oziroma $(100, 1)$ in ena točka za eno izmed rešitev $(4, 25)$ oziroma $(25, 4)$.)
Utemeljitev, da drugih možnosti ni (to je, upoštevanje tujosti števil m_1 in n_1 pri reševanju enačbe $m_1n_1 = 100$) . . . . 1 točka

V kolikor tekmovalec ne vpelje števil m_1 in n_1, lahko dobi največ 1 točko za upoštevanje, da d deli najmanjši skupni večkratnik števil m in n ali za dokaz, da sta m in n različne parnosti.

II/2. Za vsako realno število a velja $|a| \geq a$ in $|a| \geq -a$. Zato je

$$|x + y| \geq -(x + y), \quad |x + 1| \geq x + 1, \quad |y + 1| \geq y + 1, \tag{1}$$

od koder sledi

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| \geq -(x + y) + (x + 1) + (y + 1) = 2.$$

Denimo, da velja enakost. Tedaj veljajo enačaji v vseh treh neenakostih v (1) in je $x+y \leq 0$, $x + 1 \geq 0$ ter $y + 1 \geq 0$. Dobimo $-1 \leq x \leq -y \leq 1$ oziroma $-1 \leq x \leq 1$. Če je $-1 \leq x \leq 1$ in $y = -x$, velja

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| = 2.$$

Zaključimo lahko, da le za realna števila $x \in [-1, 1]$ obstaja število y, da je ta enakost izpolnjena.

2. način. Obravnavajmo primere glede na to, kakšnega predznaka sta števili $x + 1$ in $y + 1$. Ločimo 4 možnosti.

1. Če sta števili x in y obe manjši od -1, velja $x + y < -2$ oziroma $|x + y| > 2$. Zaradi $|x + 1| > 0$ in $|y + 1| > 0$ sledi

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| > 2. \tag{2}$$

2. V primeru $x \geq -1$, $y < -1$ je
$$|x+y|+|x+1|+|y+1| = |x+y|+x+1-y-1 = |x+y|+x-y.$$
Če je $x+y<0$, dobimo
$$|x+y|+x-y = -(x+y)+x-y = -2y.$$
Zaradi $y < -1$ velja $-y > 1$, torej $-2y > 2$ in zato velja ocena (2). Če je $x+y \geq 0$, dobimo naprej $|x+y|+x-y = x+y+x-y = 2x$. Zaradi $x+y \geq 0$ sledi $x \geq -y > 1$, torej je $2x > 2$ in velja neenakost (2).

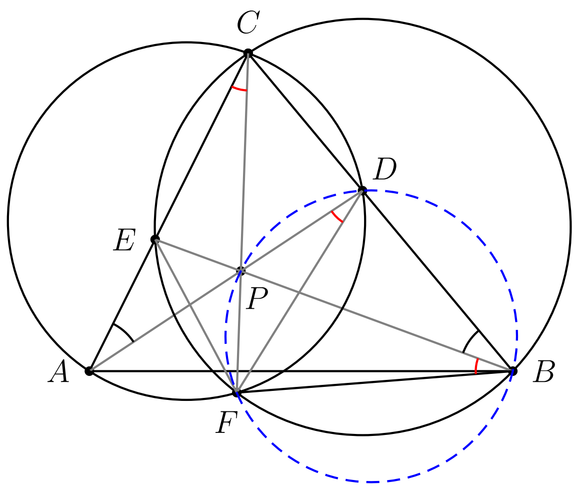
3. Podobno obravnavamo $x < -1$, $y \geq -1$ in prav tako dobimo neenakost (2).

4. Ostane še $x \geq -1$, $y \geq -1$. Tedaj velja
$$|x+y|+|x+1|+|y+1| = |x+y|+x+y+2.$$
V kolikor je $x+y>0$, naprej dobimo $|x+y|+x+y+2 = 2(x+y)+2 > 2$, torej velja neenkost (2). Sicer je $x+y \leq 0$ in velja $|x+y|+x+y+2 = -(x+y)+x+y+2 = 2$.

Pokažimo, da pri vsakem $x \in [-1,1]$ obstaja tako število y, da velja enačaj. To število je na primer $y = -x$, kajti tedaj je $y \geq -1$ in zato
$$|x+y|+|x+1|+|y+1| = 0+x+1+y+1 = 2+x+y = 2.$$
Utemeljiti moramo še, da enačba ne more veljati za ostala števila x. Pri obravnavi možnosti smo videli, da velja neenakost (2) v vsakem primeru razen $x \geq -1$, $y \geq -1$ in $x+y \leq 0$. Od tod sledi $x \leq -y \leq -(-1) = 1$, zato velja ocena $-1 \leq x \leq 1$.

Pravilna obravnava enega izmed štirih primerov (glede na predznaka števil $x+1$ in $y+1$) ali uporaba ocene $|a| \geq a$ .... 1 točka
Pravilna obravnava drugega izmed štirih primerov........................... 1 točka
Pravilna obravnava tretjega izmed štirih primerov........................... 1 točka
(Če tekmovalec k nalogi pristopi z ocenami in ne z obravnavo primerov, se mu dodelita 2 točki za uporabo ocene $|a| \geq -a$.)
Pravilna obravnava četrtega izmed štirih primerov ali ocena $|x+y| \geq -x-y$. 1 točka
Utemeljitev oziroma jasen zapis, da so obravnavani vsi primeri............... 1 točka
Če je $-1 \leq x \leq 1$, obstaja y (na primer $y=-x$), da velja enačaj .... 1 točka
Utemeljitev, da v primeru enačaja velja $-1 \leq x \leq 1$ .... 1 točka

II/3. S pomočjo obodnih kotov v štirikotnikih $AFDC$ in $BCEF$ ter dane enakosti $\angle CBP = \angle PAC$ izpeljemo



$$\begin{aligned}\angle CFE &= \angle CBE = \angle CBP = \angle PAC\\ &= \angle DAC = \angle DFC,\end{aligned}$$

zato je premica CF simetrala kota $\angle DEF$. Pokazati moramo še, da točka P leži na premici CF.
V tetivnem štirikotniku $BCEF$ je $\angle EBF = \angle ECF$, v tetivnem štirikotniku $AFDC$ pa $\angle ACF = \angle ADF$. Zato je

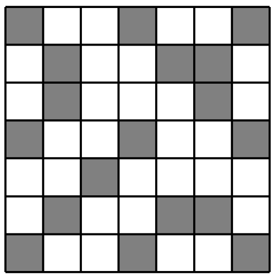
$$\angle PBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ACF = \angle ADF = \angle PDF.$$

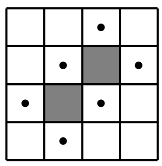
Torej točke B, D, P in F ležijo na isti krožnici. S pomočjo obodnih kotov v tetivnih štirikotnikih $BDPF$ in $AFDC$ izpeljemo

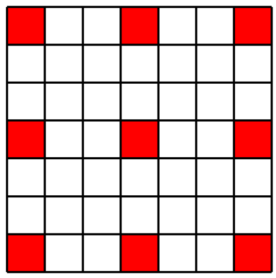
$$\angle DFP = \angle DBP = \angle CBP = \angle PAC = \angle DAC = \angle DFC,$$

od koder sledi kolinearnost točke C, P in F.
Ena izmed enakosti $\angle DAC = \angle DFC$ oziroma $\angle CFE = \angle CBE$ .... 1 točka
Sklep $\angle CFE = \angle DFC$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je premica CF simetrala kota $\angle DEF$ in sklep, da je treba dokazati kolinearnost točk C, P in F .... 2 točki
Račun $\angle PBF = \angle PDF$ (ali $\angle PEF = \angle PAF$) .... 1 točka
Štirikotnik $BDPF$ (ali $AFPE$) je tetiven .... 1 točka
Dokazana kolinearnost točk C, P in F .... 1 točka

II/4. Na tabelo lahko položimo devet ploščic, kot prikazuje prva slika. Vsako nepokrito polje ima vsaj eno sosednje polje pokrito. Utemeljimo, da z manj kot devetimi ploščicami tega ne moremo narediti. Opazujmo ploščico, ki leži na tabeli. Označimo še polja, ki so sosednja pokritim. V vsaki vrstici so največ tri polja takšna, da so bodisi pokrita bodisi sosednja pokritim, in vsa ta polja so zaporedna. Enako velja za stolpce in diagonale. Pobarvajmo devet polj, kot prikazuje tretja slika. Če bi tabelo lahko pokrili z največ osmimi ploščicami tako, da bi bilo vsako polje pokrito ali sosednje pokritemu, bi morala ena izmed teh ploščic pokriti oziroma biti sosedna dvema pobarvanima poljema, kar ni možno.







Primer tabele z devetimi ploščicami, ki zadošča pogojem .... 2 točki
Primerno barvanje 9 polj (kot na tretji sliki) .... 2 točki
Opažanje, da ena ploščica ne more hkrati pokriti ali biti sosedna dvema izmed pobarvanih polj .... 1 točka
Utemeljitev, da ena ploščica ne more hkrati pokriti ali biti sosedna dvema izmed po-

barvanih polj .... **2 točki**

V kolikor tekmovalec pristopi k dokazu, da osem ploščic ne zadošča, vendar tega dela ne uspe dokazati in ne uspe priti do delnih točk po zgornjem kriteriju, lahko prejme za ta del rešitve največ dve točki in sicer za enega izmed naslednjih sklepov:
Utemeljitev, da šest ploščic ne zadošča .... **1 točka**
Utemeljitev, da sedem ploščic ne zadošča .... **2 točki**

III/1. Naj bo $9x^2-40x+39=p^n$ za neko praštevilo p in nenegativno celo število n. Iz

$$p^n=9x^2-40x+39=(9x-13)(x-3)$$

sledi $9x-13=p^k$ in $x-3=p^l$ ali $9x-13=-p^k$ in $x-3=-p^l$ za neki števili k in l, kjer je $0 \leq l < k$ in $n=k+l$.

Rešimo najprej sistem enačb $9x-13=p^k$ in $x-3=p^l$. Velja $9(p^l+3)-13=p^k$ oziroma $14=p^k-9p^l=p^l(p^{k-l}-9)$. Če je $l=0$, dobimo $p^k=23$, torej $p=23$, $k=1$ in $x=4$. Sicer je $l \geq 1$ in $p^l \mid 14$, torej je $p^l=2$ in $p^{k-l}-9=7$ ali $p^l=7$ in $p^{k-l}-9=2$. V prvem primeru dobimo $p=2$, $l=1$, $k=5$ in $x=5$, v drugem pa rešitve ni.

Ostane še obravnava sistema enačb $9x-13=-p^k$ in $x-3=-p^l$. Tedaj je $14=p^l(9-p^{k-l})$. Edini možnosti sta $p=2$, $l=1$ ali $p=7$, $l=1$ (v tem primeru $l=0$ ni mogoče). Pripadajoči števili sta $x=1$ in $x=-4$.

Nalogi zadoščajo števila $x=-4$, $x=1$, $x=4$ in $x=5$.

Dve izmed rešitev $x=-4$**,** $x=1$**,** $x=4$ **in** $x=5$ .... **1 točka**
Zapisana še tretja rešitev .... **1 točka**
Zapisana še četrta rešitev .... **1 točka**
Razcep $p^n=(9x-13)(x-3)$ .... **1 točka**
Sklep $9x-13=p^k$ **in** $x-3=p^l$ **ali** $9x-13=-p^k$ **in** $x-3=-p^l$ .... **1 točka**
Popolna obravnava primera $9x-13=p^k$ **in** $x-3=p^l$ .... **1 točka**
Popolna obravnava primera $9x-13=-p^k$ **in** $x-3=-p^l$ .... **1 točka**

V kolikor s tekmovalčevim pristopom ni mogoče dobiti vseh rešitev naloge, tekmovalec za svoj postopek lahko dobi 1 točko, če je z njegovim postopkom mogoče priti do treh rešitev naloge.

III/2. Naj bo P polinom, ki ustreza pogojem naloge in p poljubno praštevilo. Če je q praštevilo, ki deli $P(p)$, potem deli tudi p, torej je $q=p$. Zato za vsako praštevilo p velja $P(p)=\pm p^{m_p}$ za neko nenegativno celo število m_p, ki je lahko odvisno od p.

Polinoma $P(x)=\pm 1$ očitno ustrezata pogojem. Denimo, da polinom P ni konstantno enak 1 oziroma -1. Naj bo

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

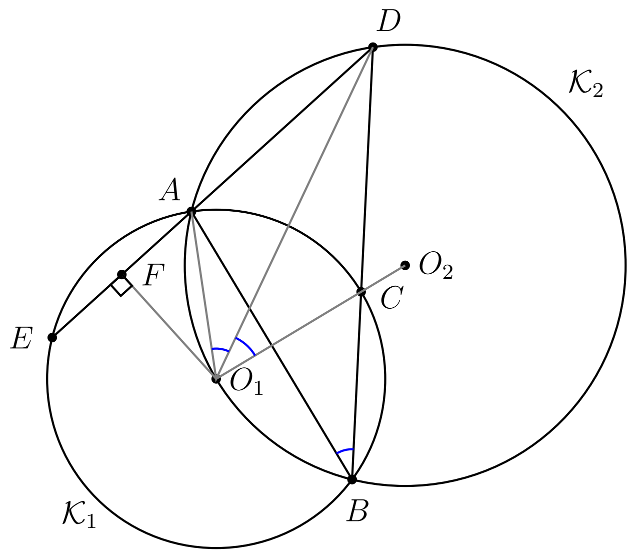
Polinom P zavzame vrednosti 1 in -1 kvečjemu za končno mnogo praštevil. Zato za neskončno praštevil velja

$$\pm p^{m_p}=P(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0$$

oziroma $p \mid a_0$. To je možno le v primeru $a_0=0$. Zapišimo $P(x)=x^kQ(x)$, kjer je $k \in \mathbb{N}$ in Q tak polinom s celimi koeficienti, da je $Q(0) \neq 0$. Naj bo a celo število in p praštevilo, ki deli $Q(a)$. Tedaj p deli $P(a)$, zato deli tudi a. To pomeni, da polinom Q ustreza pogojem naloge. Ker je $Q(0) \neq 0$, mora biti polinom Q po zgoraj pokazanem enak 1 oziroma -1. Vsi iskani polinomi so $P(x) = \pm x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ti polinomi očitno ustrezajo pogojem naloge.

Polinoma $P(x) = 1$ in $P(x) = -1$ ustrezata pogojem .... 1 točka
Če praštevilo p deli a in $P(a)$, potem $p|a_0 = 0$ .... 1 točka
Če P ni konstanten polinom, je $a_0 = 0$ .... 1 točka
Zapis $P(x) = x^k Q(x)$, kjer je $Q(0) \neq 0$ .... 1 točka
Sklep, da je Q konstanten polinom .... 1 točka
Ustrezajo polinomi $P(x) = x^n$, kjer je n neko naravno število .... 1 točka
Ustrezajo polinomi $P(x) = -x^n$, kjer je n neko naravno število .... 1 točka

III/3. Označimo $\angle ABD = \alpha$. Zaradi tetivnosti štirikotnika AO_1BD je $\angle AO_1D = \angle ABD = \alpha$. Središčni kot $\angle AO_1C$ v krožnici $\mathcal{K}_1$ je dvakrat večji od obodnega kota $\angle ABC$, zato je $\angle AO_1C = 2\alpha$. Od tod sledi



$$\begin{aligned} \angle DO_1C &= \angle AO_1C - \angle AO_1D \\ &= 2\alpha - \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Daljica AB je pravokotna na daljico O_1O_2 in štirikotnik AO_1BO_2 je deltoid. Zato je

$$\begin{aligned} \angle ABO_1 &= \angle O_1AB = \frac{\pi}{2} - \angle O_2O_1A \\ &= \frac{\pi}{2} - \angle AO_1D - \angle DO_1C = \frac{\pi}{2} - 2\alpha. \end{aligned}$$

Upoštevamo še tetivnost štirikotnika AO_1BD in izpeljemo $\angle ADO_1 = \angle ABO_1 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Ker je točka F razpolovišče daljice AE, velja $\angle AFO_1 = \frac{\pi}{2}$. Od tod sledi $\angle FO_1D = \frac{\pi}{2} - \angle FDO_1 = 2\alpha$ in

$$\angle AO_1F = \angle DO_1F - \angle DO_1A = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Pokazali smo $\angle AO_1F = \alpha = \angle AO_1C = \angle DO_1C$, torej premici AO_1 in DO_1 razdelita kot CO_1F na tri enake dele.

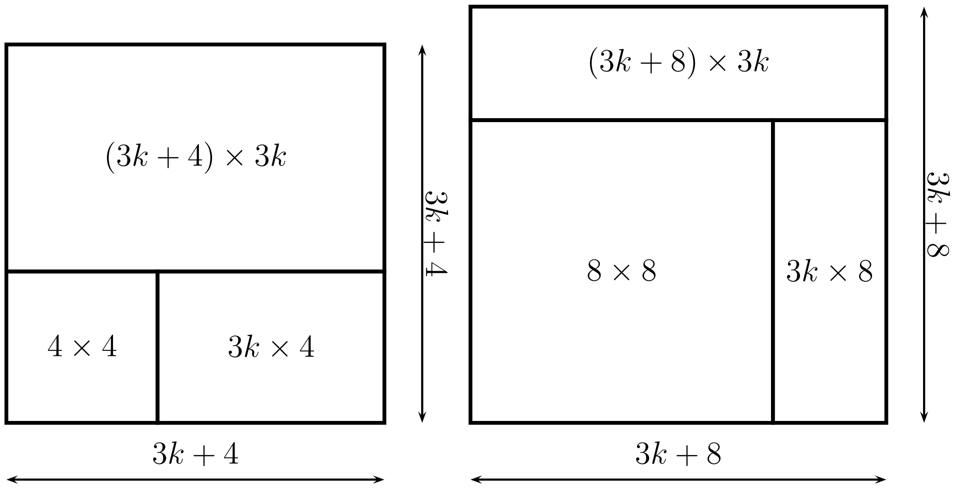
Sklep $\angle AO_1D = \angle ABC$ .... 1 točka
Sklep $\angle AO_1C = 2\angle ABC$ .... 1 točka
Ugotovitev $\angle AO_1D = \angle DO_1C$ .... 1 točka
Izračun $\angle ABO_1 = \frac{\pi}{2} - 2\angle ABC$ ali zapis kota $\angle ABO_1$ v odvisnosti od enega izmed kotov $\angle AO_1D$ ali $\angle DO_1C$ .... 1 točka
Izračun $\angle ADO_1 = \frac{\pi}{2} - 2\angle ABC$ ali zapis kota $\angle ADO_1$ v odvisnosti od enega izmed kotov $\angle AO_1D$ ali $\angle DO_1C$ .... 1 točka
Sklep $\angle AO_1F = \angle ABC$ ali $\angle AO_1F = \angle AO_1D$ ali $\angle AO_1F = \angle DO_1C$ .... 1 točka
Zaključek, da premici AO_1 in DO_1 razdelita kot CO_1F na tri enake dele ...... 1 točka

III/4. Tabelo 3×3 lahko pokrijemo s tremi ploščicami velikosti 3×1, tabelo 4×4 pa z eno ploščico velikosti 4×4. Utemeljimo, da tabele 5×5 ne moremo pokriti. S ploščicami

3×1 lahko pokrijemo le število polj, deljivih s 3. Tabela ima 25 polj, zato moramo uporabiti ploščico 4×4. V tem primeru preostalih 9 polj očitno ne moremo pokriti s tremi 3×1 ploščicami.

Naj bo k naravno število. Vsak stolpec tabele $3k\times 3k$ očitno lahko pokrijemo s k ploščicami 3×1, torej lahko pokrijemo tudi celo tabelo. Pokrijemo lahko tudi vsak pravokotnik velikosti $3k\times m$ in prav tako pravokotnike $m\times 3k$ (vsako vrstico pokrijemo s k ploščicami 3×1).

Vsa naravna števila $n\geq 7$, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1, lahko zapišemo v obliki $3k+4$ za neko naravno število k. Tabele oblike $(3k+4)\times(3k+4)$ razdelimo na kvadrat velikosti 4×4, pravokotnik velikosti $(3k+4)\times 3k$ in pravokotnik velikosti $3k\times 4$ (glej sliko). Kvadrat 4×4 pokrijemo s ploščico enake velikosti, ostala pravokotnika pa, kot smo že utemeljili, s ploščicami 3×1.



Tabelo 8×8 lahko pokrijemo s štirimi ploščicami 4×4. Vsa naravna števila $n\geq 11$, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2, lahko zapišemo v obliki $n=3k+8$. Tabelo velikosti $(3k+8)\times(3k+8)$ razdelimo na kvadrat velikosti 8×8 in pravokotnika velikosti $(3k+8)\times 8$ ter $3k\times 8$. Kvadrat pokrijemo s štirimi ploščicami 4×4, pravokotnika pa s ploščicami 3×1.

Pokrijemo lahko tabele $n\times n$ za vsa naravna števila $n\geq 3$ razen $n=5$.

Pokritji tabel 3×3 in 4×4 .... **1 točka**
Utemeljitev, da se tabele 5×5 ne da pokriti .... **2 točki**
Pokritje tabele 8×8 .... **1 točka**
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele $3k\times 3k$ (ali $4k\times 4k$) .... **1 točka**
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele $(3k+4)\times(3k+4)$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele $(3k+8)\times(3k+8)$ .... **1 točka**

Tekmovalec dobi zadnje 3 točke po zgornjem kriteriju tudi za utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele $n\times n$, kjer je $n=4x+3y$ za neki nenegativni celi števili x in y.

IV/1. Recimo, da tako število obstaja. Iz $x^4-2011x^2+n=0$ sledi

$$x^2=\frac{2011\pm\sqrt{2011^2-4n}}{2}.$$

Ker je to število celo, je 2011^2-4n popolni kvadrat. Zapišemo lahko $2011^2-4n=m^2$ za neko liho naravno število m oziroma $n=\frac{2011^2-m^2}{4}$. Zato je $x^2=\frac{2011\pm m}{2}$. Števili $\frac{2011+m}{2}$ in $\frac{2011-m}{2}$

sta tako popolna kvadrata, njuna vsota je 2011. Utemeljimo, da števila 2011 ne moremo zapisati kot vsote dveh popolnih kvadratov. Ostanek popolnega kvadrata pri deljenju s 4 je bodisi 0 bodisi 1. Ostanek vsote dveh popolnih kvadratov pri deljenju s 4 je tako 0, 1 ali 2. Ker da število 2011 pri deljenju s 4 ostanek 3, ne more biti enako vsoti dveh popolnih kvadratov. Tako celo število n, da bi imel polinom $x^4 - 2011x^2 + n$ same cele ničle, ne obstaja.

Ugotovitev $x^2 = \frac{2011 \pm \sqrt{2011^2 - 4n}}{2}$ .... 1 točka
Sklep, da je število $2011^2 - 4n$ popolni kvadrat m^2 .... 1 točka
Sklep, da sta števili $\frac{2011+m}{2}$ in $\frac{2011-m}{2}$ popolna kvadrata .... 1 točka
Ugotovitev, da od tod sledi, da je število 2011 vsota dveh popolnih kvadratov oziroma zapis enačbe $2011 = a^2 + b^2$ .... 1 točka
(V kolikor tekmovalec pride do enačbe $a^2 + b^2 = 2011$ na drug način, na primer z uporabo Vietovih formul, za ta del prav tako dobi 4 točke.)
Utemeljitev, da enačba $2011 = a^2 + b^2$ nima celoštevilskih rešitev (lahko tudi s preverjanjem vseh 44 kvadratov manjših od 2011) .... 2 točki
Zaključek, da ne obstaja celo število n, za katerega bi imel polinom $x^4 - 2011x^2 + n$ same celoštevilske ničle .... 1 točka

IV/2. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo $f(-y) = -f(y)$ za vsako realno število y. Funkcija f je liha. Vstavimo še $x = \frac{\pi}{2}$ in izpeljemo $f(y + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2} - y)$ za vsa realna števila y. Z upoštevanjem lihosti dobimo $f(y + \frac{\pi}{2}) = -f(y - \frac{\pi}{2})$. Iz prvotne enačbe za $y = \frac{\pi}{2}$ sledi

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos x.$$

Ker je $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x - \frac{\pi}{2})$, je $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos x$ oziroma

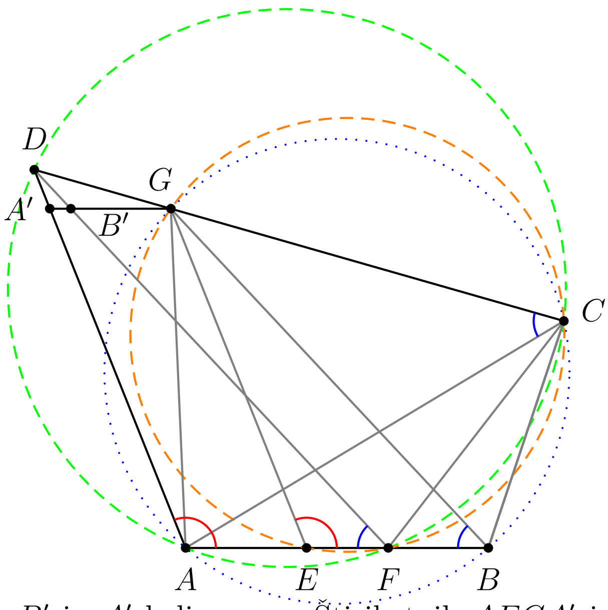
$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin x.$$

Označimo $a = f(\frac{\pi}{2})$. Tedaj je $f(x) = a \cdot \sin x$. Preverimo lahko, da ta funkcija ustreza funkcijski enačbi za vsako realno število a.

Ugotovitev $f(-y) = -f(y)$ .... 1 točka
Ugotovitev $f(y + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2} - y)$ .... 1 točka
Vstavljanje $y = \frac{\pi}{2}$ v prvotno enačbo .... 1 točka
Izpeljava $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos x$ .... 1 točka
Sklep $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin x$ ali $f(x) = a \cdot \sin x$ .... 1 točka
Preverjeno, da so funkcije $f(x) = a \cdot \sin x$ rešitve (ta točka se prizna tudi, če tekmovalec rešitev $f(x) = a \cdot \sin x$ le ugane) .... 2 točki
(Če tekmovalec ugane in preveri vsaj eno od rešitev $f(x) = 0$ ali $f(x) = \sin x$, dobi 1 točko).

IV/3. Označimo $\angle DCA = \gamma$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $AFCD$ je

$$\angle DFA = \angle DCA = \gamma.$$

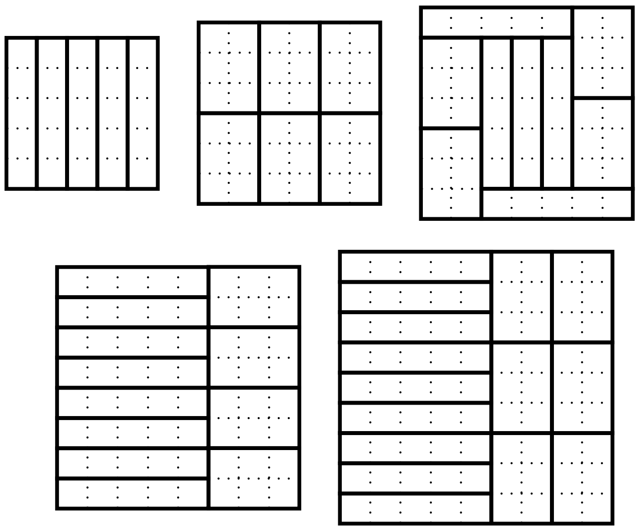


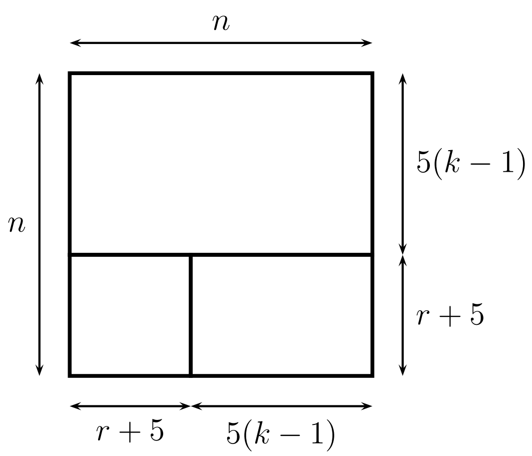
Iz tetivnosti štirikotnika $ABCG$ sledi $\angle GBA = \angle GCA = \gamma$. Od tod dobimo vzporednost premic DF in GB.
V tetivnem štirikotniku $AFCD$ velja $\angle FAD = \pi - \angle DCF$ in v tetivnem štirikotniku $GEFC$ velja $\angle GEF = \pi - \angle GCF$. Ker je $\angle GCF = \angle DCF$, od tod sledi $\angle FAD = \angle GEF$, torej sta premici AD in GE vzporedni.
Naj bosta A' takšna točka na premici AD in B' takšna točka na premici DF, da je $GA' \parallel EA$ in $GB' \parallel FB$. Očitno so točke G, B' in A' kolinearne. Štirikotnik $AEGA'$ je paralelogram, zato je $|A'G| = |AE|$. Prav tako je štirikotnik $FBGB'$ paralelogram in tako velja $|B'G| = |FB|$.
Če je $|AE| = |FB|$, velja $|A'G| = |B'G|$. Ker točka G očitno ne leži med A' in B', od tod sledi $A' = B'$. To je možno le v primeru $A' = B' = D$. Tedaj je GD vzporedna AE, kar pomeni, da sta stranici AB in CD vzporedni.
Obratno, če sta stranici AB in CD vzporedni, sta štirikotnika $AEGD$ in $FBGD$ paralelograma, saj imata dva para vzporednih stranic. Torej je $|AE| = |DG| = |FB|$.

Za dokaz, da iz $|AE| = |FB|$ sledi $AB \parallel CD$, tekmovalec dobi 4 točke po enem izmed naslednjih dveh kriterijev:
Ali:
Vzporednost premic DF in GB oziroma enakost $\angle DFA = \angle GBA$ . . . . 1 točka
Vzporednost premic AD in GE oziroma enakost $\angle GEB = \angle DAB$ . . . . 1 točka
Vpeljava točk A' in B', da sta štirikotnika $AEGA'$ in $FBGB'$ paralelograma . . 1 točka
Če je $|AE| = |FB|$, sledi $A' = B' = D$ in zato $GD \parallel AB$ . . . . 1 točka
(Zadnji dve točki tekmovalec dobi tudi, če sklepa, da sta trikotnika AFD in EBG skladna, ker enega dobimo iz drugega z vzporednim premikom.)
ali:
Razpolovišče AB je tudi razpolovišče EF . . . . 1 točka
Ugotovitev, da imata štirikotnikoma $ABCG$ in $EFCG$ očrtani krožnici obe središči na presečišču simetral CG in AB, in da od tod sledi $AB \parallel CD$ . . . . 3 točke

Za dokaz, da iz $AB \parallel CD$ sledi $|AE| = |FB|$, tekmovalec dobi 3 točke po enem od naslednjih dveh kriterijev:
Ali:
Iz vzporednosti premic AB in CD sledi, da sta štirikotnika $AEGD$ in $FBGD$ paralelograma . . . . 2 točki
Iz vzporednosti premic AB in CD sledi $|AE| = |FB|$ . . . . 1 točka
ali:
Štirikotnika $ABCG$ in $EFCG$ sta enakokraka trapeza . . . . 1 točka
Trikotnika AEG in FBC sta skladna, zato je $|AE| = |FB|$ . . . . 2 točki

IV/4. Prvih 5 tabel lahko pokrijemo (glej sliko).





Naj bo $n \geq 10$. Zapišimo $n = 5k + r$, kjer je $0 \leq r < 5$. Tedaj je $n = 5(k-1)+(r+5)$. Ker je $n \geq 10$, velja $k \geq 2$, zato je $k-1$ naravno število. Tabelo $n \times n$ razdelimo na tri dele in sicer kvadrat velikosti $(r + 5) \times (r + 5)$, pravokotnik velikosti $n \times 5(k-1)$ in pravokotnik velikosti $5(k-1) \times (r + 5)$. Kvadrat $(r + 5) \times (r + 5)$ je eden izmed kvadratov na prvi sliki in ga lahko pokrijemo z danimi ploščicami. Vsak izmed pravokotnikov ima eno stranico deljivo s 5. Pravokotnike $5a \times b$ lahko pokrijemo s ploščicami 5×1, saj lahko vsako vrstico pokrijemo z a takimi ploščicami. Prav tako lahko pokrijemo pravokotnike velikosti $c \times 5d$, saj lahko že vsak stolpec pokrijemo s ploščicami 5×1 (postavljenimi pokončno). Torej tabelo $n \times n$ za $n \geq 10$ lahko pokrijemo.

Pokrijemo lahko tabele $n \times n$ za vsa naravna števila $n \geq 5$.

Pokritje tabel velikosti $n \times n$ za $n = 5$, $n = 6$, $n = 8$ in $n = 9$ .... 2 točki
(Če tekmovalec ne obravnava vseh primerov, lahko dobi 1 točko, če pokaže pokritje neke tabele, kjer uporabi ploščice obeh vrst.)
Pokritje tabele velikosti 7×7 .... 1 točka
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele velikosti $(5k + 1) \times (5k + 1)$ .... 1 točka
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele velikosti $(5k + 2) \times (5k + 2)$ .... 1 točka
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele velikosti $(5k + 3) \times (5k + 3)$ .... 1 točka
Utemeljitev, da lahko pokrijemo tabele velikosti $(5k + 4) \times (5k + 4)$ .... 1 točka

V kolikor tekmovalec nalogo dokazuje z indukcijo, dobi 3 točke za bazo indukcije (od tega 2 točki za primere $n = 5$, $n = 6$, $n = 8$ in $n = 9$, 1 točko pa za primer $n = 7$), 4 točke pa za indukcijski korak.