Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Koper, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

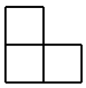
Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa naravna števila $n \geq 10$ z neničelnimi števkami, za katera velja: če odstranimo katerokoli števko števila n, dobimo število, ki deli n.

2. Za celi števili x in y velja $x + xy + y^2 = 1$ in $y(5 + x) \geq 0$. Katerim celim številom je lahko enaka vrednost izraza $x - y$?

3. Naj leži točka E na stranici CD kvadrata $ABCD$. Točka F leži na premici AB, a ne na daljici AB, in zadošča $|BF| = |DE|$. Dokaži, da sta premici AC in EF pravokotni.

4. Dana je tabela velikosti $n \times n$. V vsakem izmed njenih polj je zapisano število 0. Na vsakem koraku izberemo 3 polja tabele, ki tvorijo lik oblike



(lahko tudi zasukan),

in številom v teh poljih prištejemo 1. Ali lahko v primeru $n = 3$ po končnem številu korakov dosežemo, da so vsa števila v tabeli pozitivna in med seboj enaka? Ali lahko to dosežemo v primeru $n = 4$?

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Koper, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

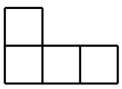
Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa 3-mestna naravna števila n z neničelnimi števkami, za katera velja: če številu n odstranimo levo števko, dobimo število, ki deli n.

2. Naj bosta a in b različni realni števili, za kateri imata enačbi $x^2 + ax + b = 0$ in $x^2 + bx + a = 0$ kakšno skupno rešitev. Koliko je $a + b$?

3. Naj bo $ABCDE$ tetiven petkotnik, v katerem je $|CD| = |DE|$. Diagonali AD in BE se sekata v točki K, diagonali AC in BD pa v točki L. Dokaži, da sta premici KL in EC vzporedni.

4. Dana je tabela velikosti $m \times n$. V vsakem izmed njenih polj je zapisano število 0. Na vsakem koraku izberemo 4 polja tabele, ki tvorijo lik oblike



(lahko tudi zasukan ali prezrcaljen),

in številom v teh poljih prištejemo 1. Ali lahko v primeru $m = 5$ in $n = 5$ po končnem številu korakov dosežemo, da so vsa števila v tabeli pozitivna in med seboj enaka? Ali lahko to dosežemo v primeru $m = 3$ in $n = 4$?

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Koper, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa cela števila a, b, c in d, ki zadoščajo enakosti
$$2a^2 + 3b^2 = c^2 + 6d^2.$$

2. Naj bo p polinom stopnje 2, katerega vsaj en koeficient ni celo število. Denimo, da je za vsako celo število n tudi število $p(n)$ celo. Dokaži, da ima tedaj polinom $q(x) = p(x) - \frac{1}{2}x(x+1)$ same celoštevilske koeficiente.

3. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Označimo z D razpolovišče tistega loka AB, ki ne vsebuje točke C, in z E razpolovišče tistega loka AC, ki ne vsebuje točke B. Naj bosta F in G dotikališči trikotniku ABC včrtane krožnice s stranicama AB in AC. Naj bo X presečišče premic EG in DF. Denimo, da je trikotnik DEX enakokrak z vrhom pri X. Dokaži, da je tedaj tudi trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri A.

4. Krt Črt ima v svojem brlogu 5 sob, oštevilčenih s številkami od 1 do 5. Med nekaterimi izmed njih je Črt izvrtal rove, tako da se iz vsake sobe lahko po nekaj rovih splazi v vsako drugo sobo. Nobena dva rova se ne sekata. Vsak rov se začne v neki sobi, konča pa v neki drugi (od začetne različni) sobi in vmes ne gre skozi nobeno sobo. Sobi, ki ju rov neposredno povezuje, imenujemo *sosednji*. Naštej pare sosednjih sob, če velja:
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 5 ne more priti v sobi 1 in 5;
   - če se Črt splazi po natanko dveh rovih, lahko iz sobe 5 pride v sobi 2 in 3;
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, lahko iz sobe 3 pride v sobo 1.

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Koper, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vsa cela števila a, b, c in d, ki zadoščajo enakosti
$$a\sqrt{2} + b\sqrt{5} + c = d\sqrt{10}.$$

2. Dokaži, da ne obstaja injektivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero bi veljalo
$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(2012) \qquad \text{za vse } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Naj bosta D in E taki točki na stranicah BC in AC trikotnika ABC, da točke A, B, D in E ležijo na isti krožnici. Središče krožnice, včrtane trikotniku BCE, označimo z L, njeno dotikališče s stranico EC pa z G. Središče krožnice, včrtane trikotniku DCA, označimo s K, njeno dotikališče s stranico DC pa z F. Naj bo N presečišče premic EL in DK, M pa presečišče premic KF in LG. Dokaži, da točke A, B, D in N ležijo na isti krožnici in da je $KMLN$ deltoid.

4. Krt Črt ima v svojem brlogu 6 sob, oštevilčenih s številkami od 1 do 6. Med nekaterimi izmed njih je Črt izvrtal rove, tako da se iz vsake sobe lahko po nekaj rovih splazi v vsako drugo sobo. Nobena dva rova se ne sekata. Vsak rov se začne v neki sobi, konča pa v neki drugi (od začetne različni) sobi in vmes ne gre skozi nobeno sobo. Sobi, ki ju rov neposredno povezuje, imenujemo *sosednji*. Naštej pare sosednjih sob, če velja:
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, lahko iz sobe 1 pride v sobi 1 in 6;
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 2;
   - če se Črt splazi po natanko štirih (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 6;
   - če se Črt splazi po natanko dveh rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 5.

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Koper, 21. april 2012

Rešitve nalog in točkovnik

I/1. Naj ima število n decimalni zapis enak $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$. Po predpostavki število $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}$ deli število $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1} = 10 \cdot \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} + a_1$, torej deli tudi število a_1. Ker je $a_1 \neq 0$, je lahko število $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}$ kvečjemu enomestno, torej je $k = 2$. Če je $n = \overline{a_2 a_1}$, potem mora po zgornjem a_2 deliti a_1, torej je $a_2 = a_1$ ali $a_2 \leq 4$. Torej je število n lahko enako le $99, 88, 77, 66, 55, 48, 44, 39, 36, 33, 28, 26, 24, 22, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12$ ali 11. Od teh pa le števila $99, 88, 77, 66, 55, 48, 44, 36, 33, 24, 22, 15, 12$ in 11 zadoščajo pogoju naloge.

Povzemimo: vse rešitve so 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99.

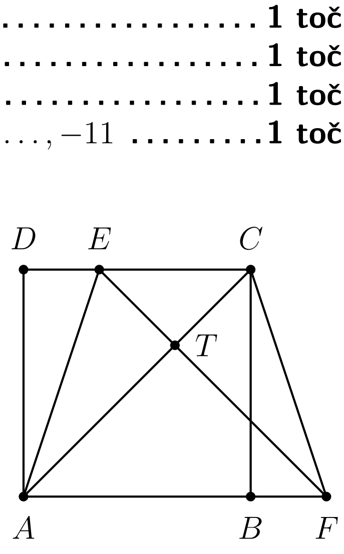
Ugotovitev in dokaz, da je n dvomestno število .... **1 + 1 točka**
Sklep, da $a_2 \mid a_1$ .... **1 točka**
Sklep, da $a_2 = a_1$ ali $a_2 \leq 4$ .... **1 točka**
Navedene vse rešitve (z utemeljitvijo ali brez) .... **3 točke**

Če tekmovalec ne navede vseh rešitev, se mu za vsakih 5 pravilnih rešitev prizna po eno točko. Če med rešitvami navede tudi števila, ki NE ZADOŠČAJO pogojem naloge, se za VSAKO NAPAČNO REŠITEV ODBIJE 1 TOČKA.

I/2. Iz enakosti sledi $x(1+y) = 1-y^2 = (1+y)(1-y)$. Če je $y = -1$, je enakost izpolnjena, iz neenakosti pa potem sledi $-(5+x) \geq 0$ oziroma $x \leq -5$. Tako je $x - y = x + 1 \leq -4$. Če pa je $y \neq -1$, potem lahko iz enakosti pokrajšamo $(1+y)$, da dobimo $x = 1 - y$. Slednje vstavimo v neenakost, da dobimo $y(6-y) \geq 0$. Torej je $0 \leq y \leq 6$. Tako je $x - y = 1 - 2y \in \{1, -1, -3, -5, -7, -9, -11\}$. Izraz $x - y$ lahko zavzame vse vrednosti manjše ali enake -4 ter vrednosti $-3, -1$ in 1.

Razcep $x(1-y) = 1 - y^2 = (1-y)(1+y)$ .... **2 točki**
Ugotovitev $x \leq -5$ (pri pogoju $y = -1$) .... **1 točka**
Zapis $x - y = x + 1 \leq -4$ .... **1 točka**
Zapis $x = 1 - y$ (pri pogoju $y \neq -1$) .... **1 točka**
Ugotovitev $0 \leq y \leq 6$ .... **1 točka**
Ugotovitev $x - y = 1 - 2y$ in zapisane VSE rešitve $1, -1, -3, \ldots, -11$ .... **1 točka**
Če je rešitev preveč, se zadnja točka ne prizna.

I/3. Označimo s T presečišče premic AC in EF. Ker je $|BF| = |DE|$, $|BC| = |DA|$ in $\angle CBF = \angle ADE = \frac{\pi}{2}$, sta trikotnika ADE in CBF skladna. Zato je $|AE| = |CF|$ in štirikotnik $AFCE$ je enakokrak trapez. Sledi $\angle EFA = \angle CAF$, ta kot pa je enak $\frac{\pi}{4}$, saj je AC diagonala kvadrata $ABCD$. Dobimo $\angle ATF = \pi - \angle EFA - \angle CAF = \frac{\pi}{2}$, zato sta premici AC in EF pravokotni.

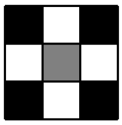


2. način. Zaradi $|BF| = |ED|$ in vzporednosti premic BF in DE, je štirikotnik $BFED$ paralelogram. Premica EF je vzporedna premici BD. Ker sta AC in BD diagonali kvadrata $ABCD$, se sekata pravokotno. Torej se tudi premici AC in EF sekata pravokotno.

Ugotovitev, da sta trikotnika ADE in CBF skladna .... 2 točki
Sklep, da $AFCE$ enakokrak trapez .... 1 točka
Sklep, da $\angle EFA = \frac{\pi}{4}$ .... 2 točki
Izračun kota $\angle ATF$ .... 2 točki

Zapisana ugotovitev $EF \parallel BD$ .... 2 točki
Utemljitev $EF \parallel BD$ .... 2 točki
Utemeljitev $AC \parallel EF$ .... 1 točka

Popolna rešitev (vsi sklepu utemeljeni) .... 2 točki

I/4. V primeru $n = 3$ je odgovor ne. Pobarvamo tabelo z belo, sivo in črno barvo, kot prikazuje slika . Opazimo, da vsak lik predpisane oblike vedno pokrije vsaj toliko belih polj kot črnih. Vsota števil na belih poljih mora biti na koncu enaka vsoti števil na črnih poljih. Zato lahko na vsakem koraku izberemo le tisti lik, ki pokrije enako belih kot črnih polj. Taki liki so natanko tisti, ki vsebujejo po eno polje vsake barve. Torej na vsakem koraku število na sivem polju povečamo za 1. Zato bi morali na vsakem koraku povečati tudi števila na vseh ostalih poljih, kar pa ni mogoče.

V primeru $n = 4$ je odgovor da. Preveriti zadošča, da je že v primeru $n = 2$ odgovor da, saj primer $n = 4$ od tod očitno sledi. Primer $n = 2$ rešimo na primer kot prikazuje spodnja slika.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2&3\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 3&3\\\hline 3&3\\\hline\end{array}$$

2. način. Naj bo najprej $n = 3$. Pobarvajmo vogalna 4 polja v tabeli z belo barvo, ostalih 5 polj pa s črno. S predpisanim likom lahko pokrijemo največ eno belo polje, ostali dve pa sta črni (ali pa so kar vsa tri črna). Denimo, da smo uspeli doseči, da je na vseh mestih v tabeli vpisano neko število $k > 0$. Za to smo morali izbrati natanko $4k$ likov, ki so pokrili natanko eno belo polje (in morda še nekaj takih, ki pokrijejo samo črna polja). Vsoto vseh števil na črnih poljih je torej vsaj $8k$. Po drugi strani pa bi morala biti končna vsota vseh števil na črnih poljih natanko $5k$. To protislovje nam pove, da v tabeli ne moremo doseči željenega stanja s samimi enakimi pozitivnimi števili.

Pri $n = 4$ pa opazimo, da lahko za poljubno izbrano polje v tabeli preostanek tabele pokrijemo s petimi danimi liki brez prekrivanj. Torej lahko dosežemo, da po prvih petih korakih za 1 povečamo vrednosti v vseh poljih z izjemo prvega. V naslednjih petih korakih lahko za 1 povečamo vrednosti v vseh poljih z izjemo drugega. Potem to ponovimo na vseh poljih z izjemo tretjega. Tako nadaljujemo in po $16 \cdot 5$ korakih bo na vseh poljih v tabeli število 15.

Ugotovitev, da je pri $n = 3$ bistvena razlika med vogalnimi in sredinskimi polji 2 točki
(Korekten!) dokaz, da za $n = 3$ ne gre .... 2 točki
Primer $n = 2$ .... 2 točki
Dokaz, da za $n = 4$ gre .... 1 točka

Če tekmovalec primer $n = 4$ reši direktno in ne naredi primera $n = 2$, dobi 3 točke.

Skupaj lahko dobi tekmovalec največ 4 točke za primer $n = 3$ in največ 3 točke za primer $n = 4$.

II/1. Pišimo $n = \overline{abc}$. Pogoj naloge pove, da $\overline{bc}$ deli $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$, torej deli tudi $100a$. Denimo najprej, da $\overline{bc}$ ni deljivo s 5. Potem mora $\overline{bc}$ deliti $4a$. Ker je $\overline{bc}$ dvomestno, mora biti tudi $4a$ dvomestno, torej je $3 \leq a \leq 9$. Torej $4a$ lahko zavzame vrednosti $12, 16, 20, 24, 28, 32$ ali 36. Dvomestni delitelji teh števil so zaporedoma 12, 16, 20 in 10, 24 in 12, 28 in 14, 32 in 16 ter 36 in 18 in 12. Ker morajo biti števke neničelne, dobimo rešitve 312, 416, 624, 612, 728, 714, 832, 816, 936, 918 in 912. Če pa je $\overline{bc}$ deljivo s 5, je $c = 5$, saj mora biti c neničelna števka. Torej je $\overline{bc} = 10b + 5 = 5(2b + 1)$ in zato mora $(2b + 1)$ deliti $20a$. Ker je $2b + 1$ liho število, mora deliti celo $5a$. Če je $2b + 1$ deljiv s 5, je bodisi $b = 2$ (torej $2b + 1 = 5$) in a poljuben, bodisi $b = 7$ (torej $2b + 1 = 15$) in a enak $3, 6$ ali 9. Tako dobimo rešitve $125, 225, 325, 425, 525, 625, 725, 825$ in 925 ter $375, 675$ in 975. Če pa $2b + 1 \neq 5$, potem je tuj 5 in zato mora deliti celo a. Torej mora biti $2b + 1 \leq 9$ in zato $b \leq 4$ in $b \neq 2$ (sicer bi bil $2b + 1 = 5$). Če je b zaporedoma enak $4, 3$ in 1, potem je lahko a zaporedoma enak 9, 7 in 3 ali 6 ali 9. Tako dobimo še rešitve $945, 735, 315, 615$ in 915.

Povzemimo: vse rešitve so 125, 225, 312, 315, 325, 375, 416, 425, 525, 612, 615, 624, 625, 675, 714, 725, 728, 735, 816, 825, 832, 912, 915, 918, 925, 936, 945, 975.

Ugotovitev, da je $\overline{bc}$ deli $100a$ .... **1 točka**
Primer, ko 5 ne deli $\overline{bc}$: sklep, da $\overline{bc}$ deli $4a$ .... **1 točka**
Primer, ko 5 deli $\overline{bc}$: sklep, da $2b + 1$ deli $5a$ .... **1 točka**
Navedenih 27 ali 28 rešitev .... **4 točke**
Če tekmovalec navede manj kot 27 rešitev, se mu za vsakih 7 pravilnih rešitev prizna po eno točko. Če med rešitvami navede tudi števila, ki NE ZADOŠČAJO pogojem naloge, se za VSAKO NAPAČNO REŠITEV ODBIJE 1 TOČKA.

II/2. Kvadratni enačbi enačimo in dobimo $x^2 + ax + b = x^2 + bx + a$. Sledi $ax + b = bx + a$ in $(x - 1)(a - b) = 0$. Ker $a \neq b$, sledi $x = 1$, nato $x = 1$ vstavimo v eno od enačb in dobimo $a + b = -1$.

Izenačitev $x^2 + ax + b = x^2 + bx + a$ .... **2 točki**
Razcep $(x - 1)(a - b) = 0$ .... **2 točki**
Uporaba $a \neq b$ in sklep $x = 1$ .... **1 + 1 točka**
Izpeljava $a + b = -1$ .... **1 točka**

2. način. Rešitvi prve enačbe sta $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, rešitvi druge pa $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$. Torej mora za neka predznaka veljati $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4a}$ oziroma

$$b - a = \mp\sqrt{a^2 - 4b} \pm \sqrt{b^2 - 4a}.$$

To enačbo kvadriramo in preuredimo, da dobimo

$$2a + 2b - ab = \pm\sqrt{(b^2 - 4a)(a^2 - 4b)}.$$

Slednje še enkrat kvadriramo in preuredimo v

$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 b + ab^2 - a^3 - b^3,$$

kar pa lahko razstavimo, da dobimo

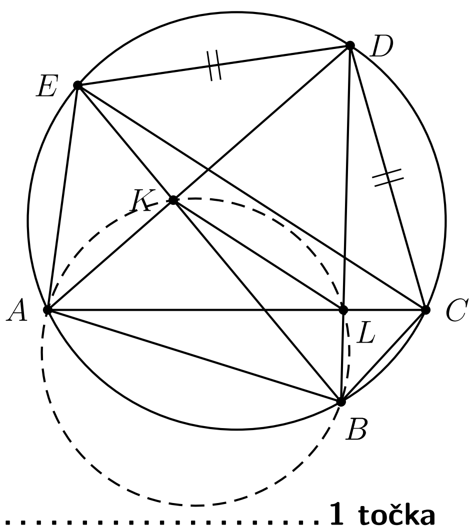
$$(a - b)^2 = -(a - b)^2(a + b).$$

Ker sta a in b različni, lahko delimo z $(a-b)^2$ in dobimo $a+b=-1$. Hitro opazimo, da imata v tem primeru enačbi res skupno rešite 1. Torej $a+b=-1$.

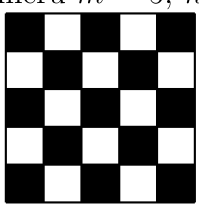
Navede obe rešitvi za prvo in obe rešitvi za drugo kvadratno enačbo .... 1 točka
Enači rešitve in obravnava vse možnosti .... 1 točka
Dobi enačbo brez korenov .... 1 točka
Razstavi enačbo na $(a-b)^2=-(a-b)^2(a+b)$ **.................................. 1 točka**
Upošteva pogoj, da sta a **in** b **različna .... 1 točka**
Ugotovitev, da imata enačbi v primeru $a+b=-1$ **skupno rešitev .... 1 točka**
Dokaz, da je $a+b=-1$ **rešitev za vse možnosti .... 1 točko**

Če tekmovalec ugane rešitev $a+b=-1$ **ali jo izračuna in pri tem pozabi na kakšno možnost, se rešitev obravnava kot nepopolno in dobi 0 točk.**

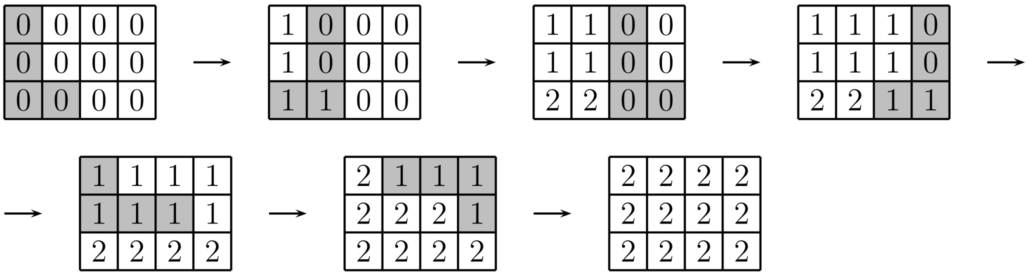
II/3. Po izreku o obodnih kotih v krogu je $\angle CED = \angle CAD$ in $\angle DCE = \angle DBE$. Ker je ECD enakokrak trikotnik z vrhom pri D, je $\angle CED = \angle DCE$. Zaradi kolinearnosti točk ALC ter zaradi kolinearnosti točk AKD je tudi $\angle LAK = \angle LBK$ in so zato točke A, B, L, K konciklične. Sledi $\angle KLA = \angle KBA = \angle EBA = \angle ECA$. Torej sta premici KL in EC vzporedni.



Ugotovitev: $\angle CED = \angle DCE$ **.. 1 točka**
Ugotovitev: $\angle CAD = \angle DBE$ **.. 1 točka**
Ugotovitev: $\angle LAK = \angle LBK$ **.. 2 točki**
Ugotovitev: A, B, L, K **konciklične .... 1 točka**
Ugotovitev: $\angle KLA = \angle ECA$ **ali** $\angle BKL = \angle BEC$ **in sklep, da sta premici** KL **in** EC **vzporedni .... 2 točki**

II/4. V primeru $m=5$, $n=5$ je odgovor ne. Pobarvamo tabelo z belo črno barvo, kot prikazuje slika . Opazimo, da vsak lik predpisane oblike vedno pokrije dve beli in dve črni polji. Torej je na vsakem koraku vsota števil na belih poljih enaka vsoti števil na črnih poljih. Ker pa je črnih polj več, bi morala biti na koncu vsota števil na črnih poljih strogo večja od vsote števil na belih poljih.

V primeru $m=3$, $n=4$ je odgovor da. Ta primer rešimo na primer kot prikazuje spodnja slika.



Primer rešitve za $m = 3$, $n = 4$ .... 2 točki
Barvanje in ugotovitev, da lik pokrije enako število belih in črnih polj .... 2 točki
Sklep, da je na vsakem koraku vsota števil na belih in črnih poljih enaka ..... 2 točki
Sklep, da bi morala biti vsota števil na črnih poljih večja od vsote na belih .. 1 točka

Odgovor brez razlage se ne točkuje. Če je primer rešitve za $m = 3$, $n = 4$ podan, vendar ni jasno razviden, se prizna samo 1 točko.

Število na ploščici je odvisno od pokritja, ki ga izberemo, zato za dokaz ni dovolj, da opazujemo števila na belih/črnih poljuh oz. pokritje belih/črnih, ampak moramo gledati vsoto.

III/1. Očitno je ena rešitev $a = b = c = d = 0$. Pokazali bomo, da je edina. Denimo, da obstaja še kaka druga rešitev (a, b, c, d). Predpostavimo lahko, da so si števila a, b, c in d tuja, saj bi sicer največji skupni delitelj lahko pokrajšali iz enačbe (ker niso vsa števila enaka 0 največji skupni delitelj obstaja). Enačbo lahko preuredimo v

$$2a^2 - c^2 = 6d^2 - 3b^2.$$

Ker je desna stran deljiva s 3, mora biti tudi leva. Toda kvadrat naravnega števila da pri deljenju s 3 ostanek 0 ali 1. Torej je edina možnost, da sta ostanka števil a^2 in c^2 pri deljenju s 3 enaka 0, to pa pomeni, da sta a in c deljivi s 3. Torej je leva stran deljiva z 9 in zato mora biti tudi desna. To pomeni, da mora biti $2d^2 - b^2$ deljivo s 3. Podobno kot prej sklepamo, da sta b in d deljiva s 3. Torej so vsa števila a, b, c in d deljiva s 3, kar pa je protislovje, saj so si tuja.

$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ **zadošča enakosti .... 1 točka**
Domneva: $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ je edina rešitev .... 2 točki
Izbira tujih si števil a, b, c, d (ali metoda neskončnega spusta) .... 1 točka
Analiza deljivosti s 3 .... 2 točki
Izpeljano protislovje .... 1 točka

III/2. Označimo $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Tedaj morajo biti števila $P(0) = \gamma$, $P(1) - P(0) = (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \alpha + \beta$ in $P(2) - 2P(1) + P(0) = (4\alpha + 2\beta + \gamma) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = 2\alpha$ cela. Označimo $2\alpha = a \in \mathbb{Z}$, torej $\alpha = \frac{a}{2}$. Če je a sod, je število α celo, zato mora biti tudi število β celo, to pa je v protislovju s predpostavko naloge, saj so vsi koeficienti polinoma P celoštevilski. Zato mora biti a lih, torej oblike $a = 2a' + 1$, $a' \in \mathbb{Z}$. Tako je $\alpha = a' + \frac{1}{2}$. Od tod sledi, da mora biti tudi β oblike $\beta = b + \frac{1}{2}$, $b \in \mathbb{Z}$. Zato je $P(x) = a'x^2 + \frac{1}{2}x^2 + bx + \frac{1}{2}x + \gamma$, torej ima polinom $Q(x) = a'x^2 + bx + \gamma$ res same celoštevilske koeficiente.

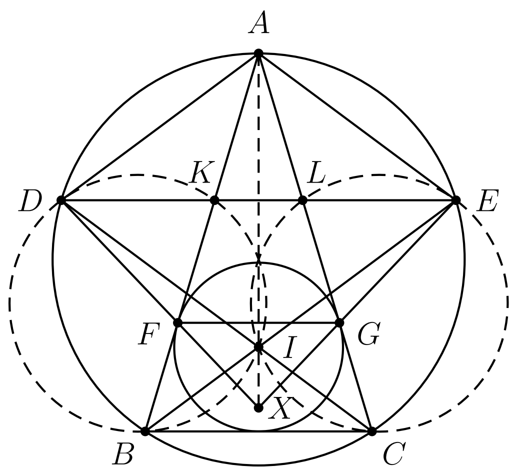
2. način. Označimo $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Tedaj morajo biti števila $P(0) = \gamma$, $P(1) - P(0) = (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \alpha + \beta$ in $P(-1) - P(0) = (\alpha - \beta + \gamma) - \gamma = \alpha - \beta$ cela. Torej vemo, da

$\alpha+\beta, \alpha-\beta \in \mathbb{Z}$. Če zadnji dve števili seštejemo in odštejemo, ugotovimo, da morata biti celi tudi števili 2α in 2β. Če je 2α sodo število, je α celo število. Ker $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}$, je tudi β celo število – pogoj naloge zato ni izpolnjen. Tako mora biti 2α liho število. S podobnim sklepom ugotovimo, da je tudi 2β liho število.

Tako lahko zapišemo $2\alpha = 2a+1$, $a \in \mathbb{Z}$ in $2\beta = 2b+1$, $b \in \mathbb{Z}$. To vstavimo v polinom Q in dobimo $Q(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Vsi njegovi koeficienti so res cela števila.

Sklep $\gamma \in \mathbb{Z}$ .... **1 točka**
Sklep $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}$ .... **1 točka**
Sklep 2α **ali** $2\beta \in \mathbb{Z}$ .... **1 točka**
Uporaba predpostavke in sklep, da sta dva koeficienta necela .... **1 točka**
Sklep, da je α **oblike** $a+\frac{1}{2}$ **za nek** $a \in \mathbb{Z}$ .... **1 točka**
Sklep, da je β **oblike** $b+\frac{1}{2}$ **za nek** $b \in \mathbb{Z}$ .... **1 točka**
Zaključni sklep, koef. polinoma Q **so celi** .... **1 točka**

Zadnjo točko tekmovalec dobi le za povsem neoporečno sklepanje skozi CELOTNO rešitev. Ob takojšnji predpostavki tekmovalca, da so koeficienti racionalna števila (in takojšnem zapisu koeficientov v obliki $\frac{x}{y}$**), se sklepov, pridobljenih s to metodo, NE PRIZNA.**



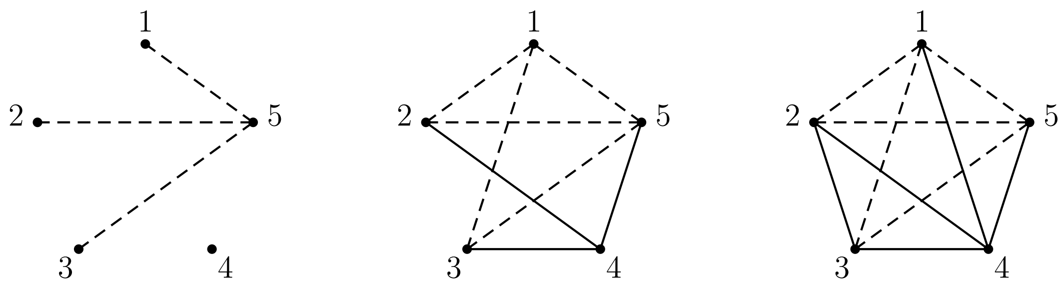
III/3. Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice, K in L pa presečišči premice DE s premicama AB in AC. Simetrala kota trikotnika gre skozi središče včrtane krožnice in razpolovišče nasprotnega loka, zato točke B, I in E ležijo na isti premici (simetrali kota pri B). Torej je $\angle IBK = \angle CBI = \angle CDE$. Zato točke B, I, K in D ležijo na isti krožnici. Podobno pokažemo, da točke C, I in D ležijo na isti premici (simetrali kota pri C) in da točke C, E, L in I ležijo na isti krožnici. Od tod sledi $\angle LKA = \angle DKB = \angle DIB = \angle CIE = \angle CLE = \angle ALK$. To pomeni, da je trikotnik KLA enakokrak z vrhom pri A. Ker sta AF in AG tangentna odseka, je tudi trikotnik FGA enakokrak z vrhom pri A. Torej sta premici DE in FG vzporedni. Ker je po predpostavki trikotnik EDX enakokrak z vrhom pri X, sledi, da je tudi trikotnik GFX enakokrak z vrhom pri X. Štirikotnik $AFXG$ je torej deltoid in zato je premica AX pravokotna na GF in posledično tudi na DE. To pomeni, da je tudi $ADXE$ deltoid in zato je ADE enakokrak trikotnik z vrhom pri A. Torej sta kota $\angle ACD$ in $\angle EBA$ enaka, saj sta obodna kota nad enako dolgima tetivama. Od tod sledi, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri A.

Ugotovitev, da je trikotnik KLA **enakokrak ali** $AI \perp DE$ .... **2 točki**
Vzporednost $DE \parallel FG$ .... **1 točka**
Sklep, da je trikotnik GFX **enakokrak** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je štirikotnik $AFXG$ **deltoid** .... **2 točki**
Sklep, da je trikotnik ADE **in s tem trikotnik** ABC **enkakokrak** .... **1 točka**

Opomba: Če dokažemo, da sta si trikotnika ADK **in** EAL **podobna, bosta kota** $\angle LKA$ **in** $\angle ALK$ **enaka in bo trikotnik** KLA **enakokrak. Omenjeno podobnost pa**

dokažemo s prematavanjem kotov: $\angle ADK = \angle ADE = \angle ABE = \angle EBC = \angle EAC = \angle EAL$ **in podobno** $\angle BAF = \angle AEL$**.**

III/4. Gotovo sobi 5 in 1 nista sosednji, saj bi se Črt sicer lahko trikrat sprehodil po tem rovu iz sobe 5 v sobo 1, od tam nazaj v sobo 5 in nato še enkrat v sobo 1. S tem bi iz sobe 5 prišel v sobo 1 po natanko treh rovih, kar je protislovno z navodili naloge. Prav tako soba 5 ni neposredno povezana s sobama 2 in 3. Če bi bila neposredno povezana na primer s sobo 2, bi se Črt iz sobe 5 lahko splazil po natanko treh rovih nazaj v sobo 5, tako da bi se po natanko dveh rovih splazil iz sobe 5 v sobo 2 in za tem po neposrednem rovu iz 2 v 5. Ker se Črt lahko po natanko dveh rovih splazi iz sobe 5 v sobo 2 in ker je soba 5 lahko sosednja le sobi 4, morajo biti neposredno povezani pari sob 5 in 4, 4 in 2 ter 4 in 3. Ker se iz sobe 5 Črt ne more splaziti v sobo 1 po natanko treh rovih, soba 1 ne more biti sosednja sobama 2 in 3. V nasprotnem primeru bi se Črt lahko splazil iz sobe 5 v sobo 1 preko sob 4 in 2 ali 4 in 3. Ker se iz sobe 3 Črt lahko splazi v sobo 1 po natanko treh hodnikih, morata biti sosednja tudi para sob 1 in 4 ter 2 in 3. Vsi sosednji pari sob so torej $(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$ in $(4,5)$.



Ugotovitev, da sobi 5 **in** 1 **nista sosednji** .... **1 točka**
Sklep, da soba 5 **ni neposredno povezana s sobama** 2 **in** 3 .... **2 točki**
Sklep, da so pari sob $(2,4),(3,4)$ **in** $(4,5)$ **sosednji** .... **1 točka**
Ugotovitev, da soba 1 **ni neposredno povezana z** 2 **in** 3 .... **2 točki**
Sklep, da sta para sob $(1,4)$ **in** $(2,3)$ **sosednja** .... **1 točka**

Za vsakega od sklepov za 2 točki, ki ni pravilno argumentiran, tekmovalec za ta sklep dobi samo 1 točko. Če sosednjost točk pri teh dveh sklepih sploh ni obravnavana, ne dobi nobene. Posebej, če tekmovalec napiše, da 5 ni sosednja 2 ali 3, ker se po natanko dveh hodnikih Črt lahko iz 5 priplazi do 2 ali 3, za ta sklep ne dobi nobene točke. Če sklep za eno točko ni argumentiran, tekmovalec zanj ne dobi točk. Vsi pravilni pari sosednjih sob brez utemeljitve so vredni 3 točke. Če tekmovalec poišče vse pare sosednjih sob, vendar vsi njegovi sklepi niso pravilni, se poišče njegov rezultat po zgornjem točkovniku. Če je ta rezultat manjši od 3, tekmovalec vseeno dobi 3 točke.

IV/1. Očitno je ena rešitev $a=b=c=d=0$. Pokazali bomo, da je edina. Denimo, da obstaja še kaka druga rešitev (a,b,c,d). Predpostavimo lahko, da so si števila a,b,c in d tuja, saj bi sicer največji skupni delitelj lahko pokrajšali iz enačbe (ker niso vsa števila enaka 0 največji skupni delitelj obstaja). Enačbo preuredimo v $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}=d\sqrt{10}-c$ in kvadriramo, da dobimo

$$2a^2+5b^2-c^2-10d^2=2\sqrt{10}(cd-ab).$$

Ker $\sqrt{10}$ ni racionalno število, mora biti $2a^2 + 5b^2 - c^2 - 10d^2 = 0$ oziroma

$$2a^2 - c^2 = 10d^2 - 5b^2.$$

Ker je desna stran deljiva s 5, mora biti tudi leva. Toda kvadrat naravnega števila da pri deljenju s 5 ostanek 0, 1 ali 4. Torej je edina možnost, da sta ostanka števil a^2 in c^2 pri deljenju s 5 enaka 0, to pa pomeni, da sta a in c deljivi s 5. Torej je leva stran deljiva s 25 in zato mora biti tudi desna. To pomeni, da mora biti $2d^2 - b^2$ deljivo s 5. Podobno kot prej sklepamo, da sta b in d deljiva s 5. Torej so vsa števila a, b, c in d deljiva s 5, kar pa je protislovje, saj so si tuja.

Ugotovitev, da je $(0, 0, 0, 0)$ rešitev enačbe.................................1 točka
Preoblikovanje in primerno kvadriranje enačbe (ostati sme največ en koren) . . 2 točki
Ugotovitev, da je $2a^2 + 5b^2 - c^2 - 10d^2 = 0$ ....1 točka
Ugotovitev, da nas deljivost s 5 pripelje v protislovje ....3 točke

2. način. Če je (a, b, c, d) rešitev enačbe, kot v prvi rešitvi dobimo, da mora veljati $2a^2 + 5b^2 - c^2 - 10d^2 = 0$. Če enačbo kvadriramo v obliki $a\sqrt{2} + c = d\sqrt{10} - b\sqrt{5}$, s podobnimi sklepi dobimo, da mora veljati $2a^2 + c^2 - 10d^2 - 5b^2 = 0$. Če ti dve enačbi odštejemo, dobimo $10b^2 - 2c^2 = 0$ oziroma $c^2 = 5b^2$. Torej je $c = \pm\sqrt{5}b$, ker pa $\sqrt{5}$ ni racionalno število sledi $b = c = 0$. Iz ene od enačb potem sledi $a^2 = 5d^2$, od koder dobimo še $a = d = 0$. Torej ima enačba le eno rešitev $a = b = c = d = 0$.

Ugotovitev, da je $(0, 0, 0, 0)$ rešitev enačbe.................................1 točka
Preoblikovanje in primerno kvadriranje enačbe (ostati sme največ en koren) . . 2 točki
Ugotovitev, da je $2a^2 + 5b^2 - c^2 - 10d^2 = 0$ ....1 točka
Ugotovitev, da je $c^2 = 5b^2$ in končni sklep ....3 točke

3. način. Kvadriramo enačbo $a\sqrt{2} + b\sqrt{5} = d\sqrt{10} - c$, dobimo $2a^2 + 5b^2 - c^2 - 10d^2 = (-ab - cd)\sqrt{10}$. Veljati mora $ab = -cd$. Če je $d = 0$, potem je $ab = 0$ in sledi $a\sqrt{2} + c = 0$ ali $b\sqrt{5} + c = 0$. V obeh primerih dobimo rešitev $a = b = c = d = 0$. Denimo, da je $d \neq 0$, tedaj je $c = -\frac{ab}{d}$. Vstavimo v začetno enačbo in dobimo $ad\sqrt{2} + bd\sqrt{5} - ab - d^2\sqrt{10} = 0$, oziroma $(d\sqrt{5} - a)(b - d\sqrt{2}) = 0$. Ker je $d \neq 0$ ne dobimo nove rešitve.

Ugotovitev, da je $(0, 0, 0, 0)$ rešitev enačbe.................................1 točka
Preoblikovanje in primerno kvadriranje enačbe (ostati sme največ en koren) . . 2 točki
Ugotovitev, da je $ab + cd = 0$ .... 1 točka
Obravnavan primer, ko je $d = 0$ .... 1 točka
Pravilno razstavljena enačba in končni sklep ....2 točki

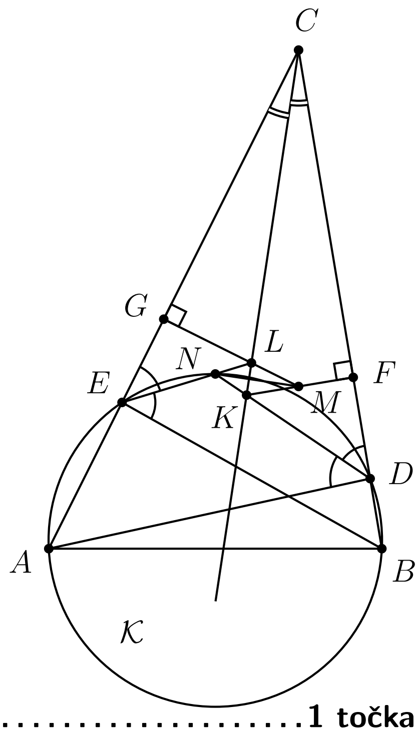
IV/2. Če v enačbo vstavimo $y = -x$, dobimo $f(f(x) - x) = f(0) + f(2012)$. Ker je na desni strani konstanta, f pa je injektivna funkcija, mora biti tudi $f(x) - x$ konstanta. Torej je $f(x) = x + c$ za neko realno število c. Če to vstavimo v začetno enačbo, dobimo $x + y + 2c = x + y + 2c + 2012$, kar nam da protislovje $0 = 2012$.

2. način. Če v enačbi zamenjamo x in y, dobimo $f(f(y)+x) = f(x+y)+f(2012) = f(f(x)+y)$. Zaradi injektivnosti funkcije f sledi $f(y) + x = f(x) + y$ oziroma $f(x) - x = f(y) - y$ za vsa realna števila x in y. To pomeni, da je $f(x) - x$ konstanta. Zaključimo enako kot v prvi rešitvi.

Vstavljanje uporabnih vrednosti za x in y v funkcijsko enačbo, npr. $y = -x$ ali zamenjana vloga x in y .... 2 točki

(Za vstavljanje različnih vrednosti v funkcijsko enačbo lahko tekmovalec dobi skupaj največ 2 točki)
Upoštevanje injektivnosti funkcije .... 1 točka
Ugotovitev, da je $f(x) - x$ konstanta, oziroma $f(x) = x + c$ za neko realno število c 2 točki
Vstavljen predpis za funkcijo $f(x) = x + c$ v funkcijsko enačbo .... 1 točka
Dobljeno protislovje, npr. $0 = 2012$ ali $f(0) = f(2012)$, f injektivna funkcija ... 1 točka

IV/3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica, na kateri ležijo točke A, B, D in E. Ker je EL simetrala kota $\angle BEC$, razpolavlja tisti lok $\widehat{AB}$, na katerem leži E. Podobno premica DK razpolavlja tisti lok $\widehat{AB}$, na katerem leži D. Ker E in D ležita na istem bregu premice AB, premici EL in DK razpolavljata isti lok $\widehat{AB}$ in se zato sekata na krožnici $\mathcal{K}$ (v točki N). Točke A, B, D, N so torej konciklične. Ker so točke A, B, D, E koncikličnе, sta kota $\angle CDA$ in $\angle BEC$ enaka. Torej, če označimo $\alpha = \angle CDK$, potem je $\angle CDK = \angle KDA = \angle BEL = \angle LEC = \alpha$. Točke K, L in C so kolinearne, zato velja



$$
\begin{aligned}
\angle NLK &= \angle 180^\circ - CLE = \angle ECL + \alpha = \\
&= \angle KCD + \alpha = 180^\circ - \angle DKC = \\
&= \angle LKN.
\end{aligned}
$$

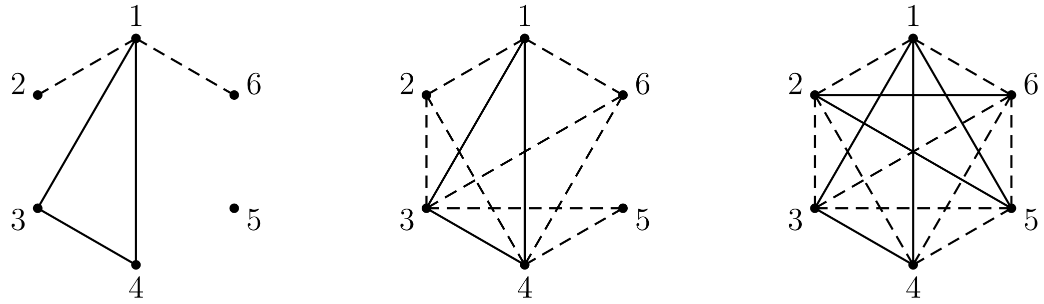
Podobno pokažemo tudi $\angle MKL = \angle KLM$. Torej je $KMLN$ deltoid.

Dokaz, da velja $\angle CDK = \angle KDA = \angle BEL = \angle LEC$ .... 1 točka
Dokaz, da točke A, B, D in N ležijo na isti krožnici .... 2 točki
Enakost kotov $\angle NLK = \angle LKN$ .... 2 točki
Enakost kotov $\angle MKL = \angle KLM$ .... 2* točki

*** Če tekmovalec ne dokaže $\angle MKL = \angle KLM$, ugotovi pa kolinernost K, L, C ali enakost $\angle LMK = \angle ACB$, se prizna 1 točka.**

Če rešitev tekmovalca ni pravilna za vse možne konstrukcije (npr. ne upošteva lege točke N na loku $\widehat{AB}$, glede na lego točk D in E), se mu odbije ena točka.

IV/4. Sobi 1 in 2 nista sosednji, saj bi sicer Črt prek treh rovov lahko prišel iz sobe 1 v sobo 2 s sprehodom $1 - 2 - 1 - 2$. Ker lahko prek treh rovov pride v sobo 1, ne pa prek štirih rovov v sobo 6, soba 1 ne sme biti sosednja sobi 6. Ker lahko Črt prek treh rovov iz sobe 1 pride nazaj v sobo 1, morata obstajati dve različni sobi X in Y (različni od 1), tako da so si sobe 1, X in Y sosednje. Ker lahko iz sobe 1 v sobi X in Y pride prek dveh rovov, nobena od teh dveh sob ni soba 5. Iz že dokazanega sledi tudi, da nobena od teh dveh sob ni soba 2 ali 6, zato sta sobi X in Y sobi 3 in 4. Pokazali smo torej, da so si sobe 1, 3 in 4 sosednje. Soba 3 ni sosednja sobi 5, saj bi sicer Črt lahko prek dveh rovov prišel iz sobe 1 v sobo 5 s sprehodom $1 - 3 - 5$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 5. Soba 3 ni sosednja sobi 2, saj bi sicer Črt lahko prek treh rovov prišel iz sobe 1 v sobo 2 s sprehodom $1 - 4 - 3 - 2$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 2. Soba 3 ni sosednja sobi 6, saj bi sicer Črt lahko prek štirih rovov prišel iz sobe 1 v sobo 6 s sprehodom $1 - 3 - 1 - 3 - 6$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 6. Edini preostali možen sprehod iz sobe 1 v sobo 6 prek treh rovov je sprehod $1-5-2-6$, torej sta sobi 1 in 5 sosednji, sobi 5 in 2 sosednji ter sobi 2 in 6 sosednji. Sobi 5 in 6 nista sosednji, saj bi sicer Črt lahko prek štirih rovov prišel iz sobe 1 v sobo 6 s sprehodom $1-5-1-5-6$. Pari sosednjih sob so torej pari $(1,3),(1,4),(1,5),(2,5),(2,6)$ in $(3,4)$.



Sklep, da sobi 1 in 2 nista sosednji .... 1 točka
Sklep, da sobi 1 in 6 nista sosednji .... 1 točke
Sklep, da so sobe 1, 3 in 4 sosednje .... 1 točka
Sklep, da sobi 3 in 4 nista sosednji sobam 2, 5 in 6 .... 2 točki
Sklep, da je 1 sosednja 5, 5 sosednja 2 in 2 sosednja 6 .... 1 točka
Sklep, da sobi 5 in 6 nista sosednji .... 1 točka
Če pri sklepih večkrat manjka utemeljitev, se tekmovalcu odšteje 1 točka. Če tekmovalec napiše pravilno rešitev brez vseh utemeljitev, dobi 3 točke.

2. način. Iz prvega pogoja sledi, da obstajata taki različni sobi $X \neq 1$ in $Y \neq 1$, da so sobe 1, X in Y sosednje. Prav tako obstajata različni sobi $Z \neq 1$ in $W \neq 6$, da je 1 sosednja Z, Z sosednja W in W sosednja 6. Soba 6 ni sosednja sobi 1, saj bi sicer imeli sprehod $1-X-Y-1-6$. Torej $X, Y, Z \neq 6$ in $W \neq 1$. Če bi veljalo $Z = X$, bi imeli sprehod $1-Y-X-W-6$, kar pa ni mogoče. Torej $Z \neq X$ in podobno $Z \neq Y$. Če bi veljalo $W = X$, bi imeli sprehod $1-X-1-X-6$, kar spet ni mogoče. Torej $W \neq X$ in podobno $W \neq Y$. Dokazali smo, da so sobe $1, 6, X, Y, Z$ in W različne, ker pa jih je skupaj 6, so to natanko vse sobe. Iz drugega pogoja sledi, da soba 2 ni sosednja sobi 1, saj bi sicer imeli sprehod $1-2-1-2$. Torej $2 \neq X, Y, Z$ in zato $2 = W$. Ker iz sobe 1 lahko pridemo prek dveh rovov do sob X in Y, sledi $5 = Z$. Sobi X in Y sta torej sobi 3 in 4 (zaradi simetrije je vseeno, katera je katera). Podobno kot v prvi rešitvi pokažemo, da drugih sosednjosti med sobami ni. Pari sosednjih sob so torej natanko pari $(1,3),(1,4),(1,5),(2,5),(2,6)$ in $(3,4)$.
Sklep, da sobi 1 in 6 nista sosednji .... 1 točka
Dokaz, da so sobe $1, 6, X, Y, Z, W$ različne .... 3 točke
Določitev vrednosti sob X, Y, Z, W .... 2 točki
Dokaz, da drugih sosednjosti med sobami ni .... 1 točka
Če pri sklepih večkrat manjka utemeljitev, se tekmovalcu odšteje 1 točka. Če tekmovalec napiše pravilno rešitev brez vseh utemeljitev, dobi 3 točke.