**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Jure je na ravnini risal po 4 različne premice v različnih položajih in z n označil število presečišč premic v posamezni legi. S katero množico so podane natanko vse možne vrednosti števila n?

(**A**) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (**B**) $\{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$ (**C**) $\{0, 1, 3, 4, 6\}$
(**D**) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ (**E**) $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

A2. Vrednost izraza $10^{2016} - 10^{15}$ je naravno število. Koliko je vsota števk tega naravnega števila?

(**A**) 1 (**B**) 17 (**C**) 2001 (**D**) 18 000 (**E**) 18 009

A3. Za neničelni realni števili a in b, $a \neq -1$ in $b \neq -1$, velja $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1$. Katera trditev o izrazu $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab}$ je pravilna?

(**A**) Izraz lahko zavzame poljubno vrednost z intervala $(0, 1]$.

(**B**) Izraz lahko zavzame poljubno vrednost z intervala $[1, 2)$.

(**C**) Vrednost izraza je 1.

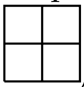
(**D**) Vrednost izraza je 2.

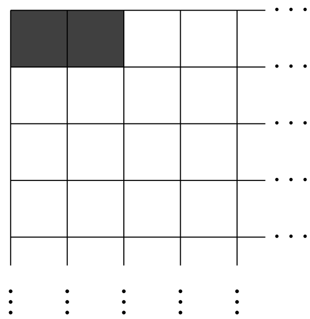
(**E**) O vrednosti izraza ne moremo povedati ničesar.

B1. Poišči vse pare tujih celih števil x in y, ki rešijo enačbo

$$4x^3 + y^3 = 3xy^2.$$

B2. Za trikotnik ABC velja $|AB| = 2|AC|$, D pa je taka točka na poltraku CA, da velja $|CD| = 3|AC|$. Dokaži, da pravokotnica iz točke C na premico BD razpolavlja daljico AB.

B3. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Maja in Peter želita vsako polje tabele velikosti $n \times n$ pobarvati bodisi črno bodisi modro, tako da bosta izmed poljubnih štirih polj, ki jih lahko prekrijemo z domino oblike , natanko dve polji črni. Peter je prvi dve polji v prvi vrstici tabele že pobarval črno (glej sliko). Na koliko načinov lahko Maja pobarva preostanek tabele?



dMFA

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V enakosti treh ulomkov $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{58}{174}$ nastopa vsaka števka od 1 do 9 natanko enkrat, vrednost vseh treh ulomkov pa je enaka $\frac{1}{3}$. Tudi v enakosti $\frac{*}{*}=\frac{*}{*}=\frac{7*}{15*}$ nastopa vsaka števka od 1 do 9 natanko enkrat, le da je namesto nekaterih števk narisana zvezdica. Koliko je vrednost vseh treh ulomkov v tem primeru?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{2}{3}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{3}{5}$

A2. Eden izmed kotov *izjemnega* enakokrakega trikotnika je 10° večji od nekega drugega kota tega trikotnika. Najmanj koliko je velik najmanjši kot izjemnega enakokrakega trikotnika?

(**A**) $52^\circ 20'$ (**B**) $53^\circ 20'$ (**C**) $56^\circ 40'$ (**D**) $63^\circ 20'$ (**E**) $66^\circ 40'$

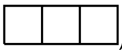
A3. Katera izmed naštetih kvadratnih enačb ima rešitvi $1-\sqrt{2}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$?

(**A**) $x^2+2x-1=0$ (**B**) $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ (**C**) $x^2+x-1=0$
(**D**) $x^2-2x-1=0$ (**E**) $x^2-x+2=0$

B1. Določi vse pare realnih števil a in b, ki ustrezajo neenakosti

$$a^2(2a-b)+b^2(2b-a)\geq 0.$$

B2. Dan je ostrokoten trikotnik ABC in taka točka D v notranjosti tega trikotnika, da velja $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ in $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC$. Dokaži, da sta premici AD in BC pravokotni.

B3. Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Na vsako polje tabele velikosti $n \times n$ želimo zapisati eno izmed števil 1, 2 ali 3, tako da bodo na poljubnih treh poljih, ki jih lahko prekrijemo z domino oblike , pri čemer lahko domino tudi zavrtimo, zapisana različna števila. Na koliko načinov lahko to storimo?

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

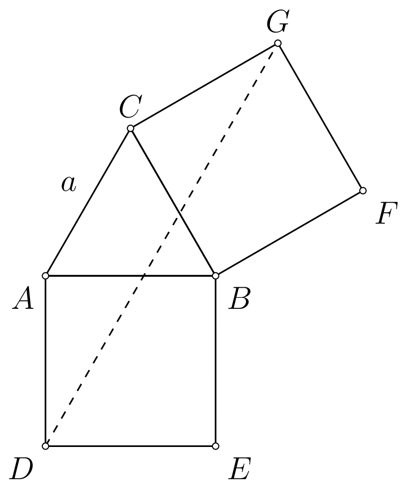
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

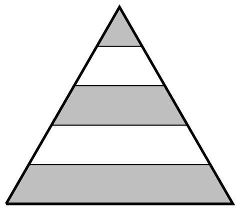
B1	B2	B3

A1. Nad stranicama AB in BC enakostraničnega trikotnika ABC s stranico dolžine a načrtamo kvadrata $BADE$ in $CBFG$ (glej sliko). Koliko je dolga daljica DG?



(A) $(\sqrt{2}+1)a$
(B) $(2\sqrt{2}+1)a$
(C) $(\sqrt{3}+1)a$
(D) $\sqrt{3}a$
(E) 1

A2. Enakostranični trikotnik na sliki je s črtami, vzporednimi eni od stranic, razdeljen na 5 enako širokih pasov, od katerih so trije pobarvani. Kolikšen delež trikotnika je pobarvan?



(A) 52% **(B)** 58% **(C)** 60%
(D) 68% **(E)** 72%

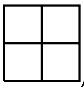
A3. Kvadratni enačbi $x^2+ax+2=0$ in $x^2+2x+a=0$, pri čemer je a realno število, imata realne rešitve. Vsota kvadratov rešitev prve enačbe je enaka vsoti kvadratov rešitev druge enačbe. Koliko je a?

(A) -4 **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** 4
(E) Nič od naštetega.

B1. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned}\log_3 x^2 + \log_2 y^3 &= 1, \\ \log_9 x^4 + \log_4 y^9 &= 2.\end{aligned}$$

B2. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem O in $\mathcal{K}'$ krožnica, ki poteka skozi točko O in ima polmer večji od dvakratnika polmera krožnice $\mathcal{K}$. Skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ se dotika krožnice $\mathcal{K}$ v točki A, krožnice $\mathcal{K}'$ pa v točki B. Označimo s C zrcalno sliko točke B pri zrcaljenju čez točko A. Premica AO seka krožnico $\mathcal{K}'$ v točkah O in D, premica CD pa seka krožnico $\mathcal{K}'$ v točkah D in E. Dokaži, da je premica BE tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

B3. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Katja želi pobarvati vsako polje tabele velikosti $n \times n$ bodisi črno bodisi zeleno, tako da bo izmed poljubnih štirih polj, ki jih lahko prekrijemo z domino oblike , liho mnogo polj črnih. Na koliko načinov lahko to stori?

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 180 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Trije prijatelji, Andrej, Blaž in Cene, so igrali badminton. V vsaki igri sta dva izmed njih igrala eden proti drugemu, tretji pa je počival. Zmagovalec posamezne igre in tisti, ki je ta čas počival, sta se pomerila v naslednji igri. Andrej je odigral 17 iger, Blaž pa 23 iger. Najmanj koliko iger je odigral Cene?

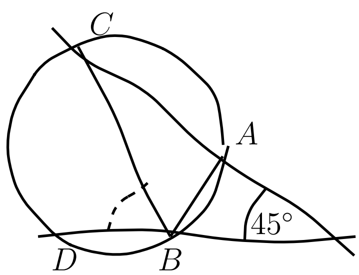
(**A**) 6 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 23

A2. V zaporedju $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ je vsota vsakih treh zaporednih členov enaka 2016. Velja še $a_{667} = 667$ in $a_{1004} = 1004$. Koliko je a_{2016}?

(**A**) 0 (**B**) 345 (**C**) 667 (**D**) 1004 (**E**) 2016

A3. Nosilki tetiv AC in BD krožnice s polmerom 1 se sekata pod kotom $45°$ (glej skico). Dolžina tetive AB je enaka 1. Koliko je velik kot $\sphericalangle CBD$?

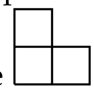
(**A**) $45°$ (**B**) $60°$ (**C**) $65°$ (**D**) $75°$ (**E**) $85°$

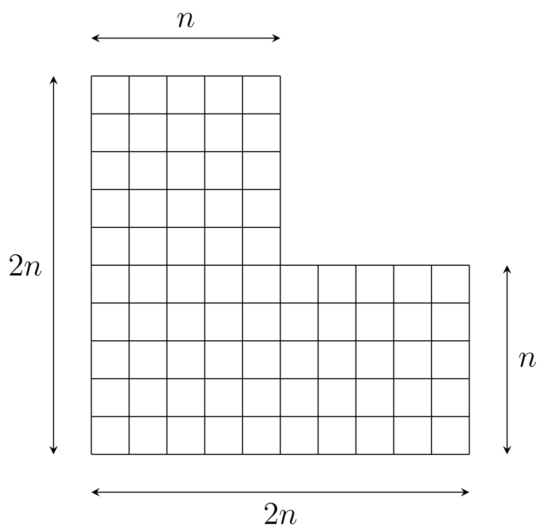


B1. Poišči vse četverice celih števil a, b, c in d, ki rešijo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= d + 13, \\
a + 2b + 3c &= \frac{d}{2} + 13.
\end{aligned}
$$

B2. Kot $\sphericalangle BAC$ trikotnika ABC je velik 30°, P pa je poljubna točka v notranjosti tega trikotnika. Zrcalne slike točke P pri zrcaljenu čez stranice BC, CA in AB zaporedoma označimo s P_A, P_B in P_C. Denimo, da je $P_A P_B P_C$ enakostraničen trikotnik. Dokaži, da je tedaj $\sphericalangle BPC = 90^\circ$.

B3. Dokaži, da lahko figuro, prikazano na sliki, tlakujemo z dominami oblike  za vsako naravno število n. Pri tlakovanju lahko domine vrtimo, nobeni dve domini se ne smeta prekrivati in nobena domina ne sme segati čez rob figure.



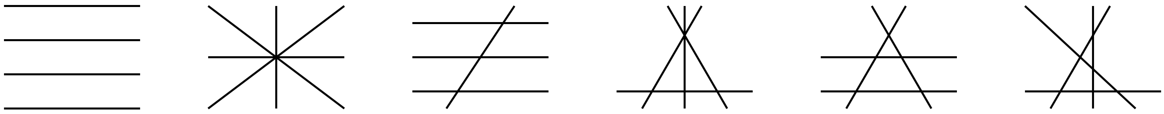
60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
B	E	C

I/A1. Kot prikazujejo slike, se lahko štiri različne premice v ravnini sekajo v 0, 1, 3, 4, 5 ali 6 točkah.



Denimo, da sta presečišči natanko 2. V vsakem od teh presečišč se potem sekata bodisi 2 premici bodisi 3 premice. Denimo, da se v enem presešišču, označimo ga z A, sekajo 3 premice. Ena od teh treh premic, označimo jo s p, mora potem potekati tudi skozi drugo presečišče, ki ga označimo z B. Preostali premici, ki potekata skozi A označimo s q in r, zadnjo premico, ki poteka skozi B, pa označimo z s. Tedaj bo premica s sekala vsaj eno izmed premic q in r v tretjem presečišču, kar je protislovje. Torej bi se morali v vsakem izmed dveh presečišč sekati natanko 2 premici. Toda tudi v tem primeru bi obstajalo med temi premicami vsaj še eno presečišče. Pravilen odgovor je (**B**).

I/A2. Naravno število, ki predstavlja vrednost izraza $10^{2016}-10^{15}$ ima 2016 števk, zadnjih 15 je enakih 0, ostale pa so enake 9. Vsota števk tega števila je torej $(2016-15)\cdot 9 = 18\,009$.

I/A3. V dani enakosti odpravimo ulomke in jo poenostavimo do $a^2+b^2=ab+1$. Dani izraz postavimo na skupni imenovalec, da dobimo $\frac{a^2+b^2-1}{ab}$. Iz enakosti sledi, da je vrednost izraza enaka $\frac{ab}{ab}=1$. Pravilen odgovor je (**C**).

I/B1. Število x deli $4x^3$ in $3xy^2$, zato mora deliti tudi y^3. Ker pa sta števili x in y tuji, je to mogoče le, če je $x=1$ ali $x=-1$.

Če je $x=1$, dobimo enakost $4+y^3=3y^2$, ki jo preoblikujemo v $4=y^2(3-y)$. Torej y^2 deli 4, zato je bodisi $y^2=1$ ali $y^2=4$. V prvem primeru iz enakosti sledi $y=-1$, v drugem pa $y=2$. Če pa je $x=-1$, dobimo enakost $-4+y^3=-3y^2$, ki jo preoblikujemo do $y^2(y+3)=4$. Sklepamo podobno kot v prvem primeru, da pridemo do rešitev $y=1$ in $y=-2$.

Pari (x,y) tujih celih števil, ki rešijo enačbo, so torej $(1,-1)$, $(1,2)$, $(-1,1)$ in $(-1,-2)$.

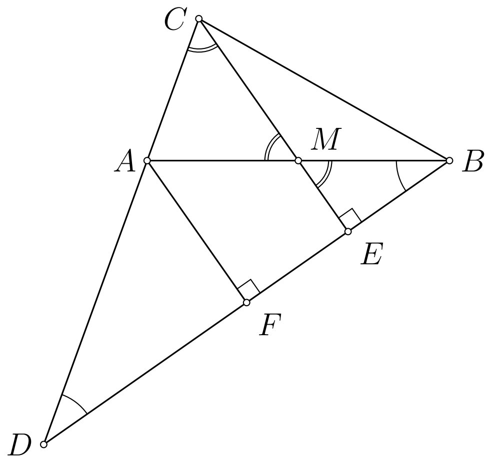
2. način. Dani enačbi prištejemo $3y^3$ in nato obe strani razstavimo, da dobimo enačbo $4(x+y)(x^2-xy+y^2)=3y^2(x+y)$. Če postavimo vse člene na levo stran enačbe, lahko izpostavimo $(x+y)$, torej $(x+y)(4x^2-4xy+y^2)=0$, nato pa razstavimo še drugi faktor, da dobimo enačbo $(x+y)(2x-y)^2=0$. Torej je bodisi $y=-x$ ali pa $y=2x$. Ker pa sta x in y tuji števili, je lahko x enak le 1 ali -1. Tako dobimo štiri pare (x,y) tujih števil, ki rešijo enačbo, to so $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ in $(-1,-2)$.

1. način:

Sklep, da x deli y^3 .... 2 točki

Ugotovitev $x=1$ **ali** $x=-1$ .... **1 točka**
Obravnava $x=1$ **in dobljeni rešitvi** $(1,2),(1,-1)$ .... **2 točki**
Obravnava $x=-1$ **in dobljeni rešitvi** $(-1,1),(-1,-2)$ .... **2 točki**
(Če tekmovalec najde vse rešitve brez postopka, se dodelita 2 točki. Če tekmovalec najde dve rešitvi brez postopka, se dodeli 1 točka.)
2. način:
Delna faktorizacija $4(x+y)(x^2-xy+y^2)=3y^2(x+y)$ .... **2 točki**
Dobljena faktorizacija $(x+y)(2x-y)^2=0$ .... **1 točka**
(Za smiselno faktorizacijo npr. $4x^3=(3x-y)y^2$**,** $x(3y^2-4x^2)=y^3$ **se dodeli 1 točka)**
Obravnava $x=-y$ .... **2 točki**
Obravnava $2x=y$ .... **2 točki**
(Če tekmovalec najde vse rešitve brez postopka, se dodelita 2 točki. Če tekmovalec najde dve rešitvi brez postopka, se dodeli 1 točka.)

I/B2.



Označimo presečišče pravokotnice iz točke C na premico BD in premice BD z E, presečišče premic CE in AB pa z M. Velja $|AD|=2|AC|=|AB|$, zato je trikotnik DBA enakokrak z vrhom pri A, torej velja $\sphericalangle BDA=\sphericalangle ABD$. Sledi $\sphericalangle ACM=90^\circ-\sphericalangle EDC=90^\circ-\sphericalangle BDA=90^\circ-\sphericalangle ABD=\sphericalangle EMB=\sphericalangle CMA$. Torej je tudi trikotnik CAM enakokrak z vrhom pri A. Od tod sledi $|AM|=|AC|=\frac{1}{2}|AB|$, kar pomeni, da je M razpolovišče daljice AB.

2. način. Naj bosta točki E in M kot v prvi rešitvi in naj bo F presečišče pravokotnice skozi točko A na premico DB in premice DB. Iz podobnosti trikotnikov DFA in DEC sledi $\frac{|DF|}{|FE|}=\frac{|DA|}{|AC|}=2$ oziroma $|DF|=2|FE|$. Kot v prvi rešitvi sklepamo, da je trikotnik DBA enakokrak z vrhom pri A, torej velja $|DF|=|FB|$. Iz teh dveh enakosti sledi $|FE|=|EB|$. Iz podobnosti trikotnikov FBA in EBM sledi $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|FE|}{|EB|}=1$, torej je M razpolovišče daljice AB.

1. način:
Ugotovitev, da je $\triangle ABD$ **enakokrak** .... **2 točki**
Dokaz, da je $\sphericalangle ACM=\sphericalangle CMA$ .... **2 točki**
Ugotovitev, da je $\triangle ACM$ **enakokrak** .... **1 točka**
Izračun $|AM|=|AC|=\frac{1}{2}|AB|$. .... **2 točki**
2. način:

Ugotovitev, da je $\triangle ABD$ enakokrak .... **2 točki**
Izračun $|DF| = 2|FB|$ .... **1 točka**
Izračun $|FE| = |EB|$ .... **2 točki**
Uporaba podobnosti $\triangle FBA$ in $\triangle EBM$ za dokaz $|AM| = |MB|$ .... **2 točki**

I/B3. Postavimo domino v levi zgornji kot tabele, tako da prekrije obe črni polji, ki jih je pobarval Peter. Ker mora domina prekrivati natanko 2 črni polji, mora Maja prvi dve polji v 2. vrstici pobarvati modro. Če pomaknemo domino za eno vrstico nižje, s podobnim sklepom ugotovimo, da mora Maja prvi dve polji v 3. vrstici pobarvati črno. Prvi dve polji v 4. vrstici pa mora spet pobarvati modro. Če sklep nadaljujemo, ugotovimo, da mora Maja prva dva stolpca pobarvati izmenjajoče črno-modro, torej tu nima nobene izbire.

Poglejmo sedaj prvo vrstico tabele. Preostalih $n-2$ nepobarvanih polj v tej vrstici lahko Maja pobarva na 2^{n-2} različnih načinov, saj ima za vsako polje na voljo dve barvi. Pokažimo, da lahko Maja, neglede na to, kako pobarva prvo vrstico, potem pobarva preostanek tabele na en sam pravilen način. Denimo torej, da je Maja že pobarvala prva dva stolpca in prvo vrstico tabele. Postavimo domino kamorkoli v 2. in 3. stolpec. Levi dve polji, prekriti z domino, sta pobarvani z različnima barvama, saj je 2. stolpec pobarvan izmenjajoče. Torej, mora Maja tudi desni dve polji, prekriti z domino, pobarvati z različnima barvama, sicer domina ne bi prekrivala natanko dveh črnih polj. To pomeni, da mora Maja tudi 3. stolpec pobarvati izmenjajoče. Ker je prvo polje 3. stolpca že pobarvala, lahko preostanek 3. stolpca pobarva na en sam način. Podobno sklepamo, da mora Maja tudi 4. stolpec in nato vsak naslednji stolpec pobarvati izmenjajoče. Ker je prvo vrstico že pobarvala lahko preostanek tabele pobarva na en sam način. Tako barvanje očitno ustreza pogoju, saj so vsi stolpci pobarvani izmenjajoče, kar pomeni, da domina vedno pokrije natanko eno črno polje v enem stolpcu in natanko eno črno polje v drugem stolpcu, torej skupaj natanko dve črni polji.

Ugotovitev, kako morata biti pobarvana 1. in 2. stolpec .... **1 točka**
Ugotovitev in razlaga, da eno pobarvano polje enolično določa barvanje celega stolpca (če so vsi levo že pobarvani) .... **2 točki**
Ugotovitev, da so polja v stoplcih pobarvana izmenično (oz. je to očitno iz konstrukcije) .... **1 točka**
Pravilno prešteto število različnih barvanj 1. vrstice ali enakovrednega območja .... **1 točka**
Premislek, da so vsa dobljena barvanja pravilna (oz. je to očitno iz konstrukcije) .... **1 točka**
Popolnoma pravilen končni rezultat .... **1 točka**

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
A	B	D

II/A1. Za ponujene odgovore velja $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Zadnji ulomek v enakosti pa lahko ocenimo

$$\frac{1}{3} = \frac{60}{180} < \frac{7*}{15*} < \frac{90}{150} = \frac{3}{5}.$$

Torej je edini možni odgovor (**A**). S poskušanjem hitro ugotovimo, da je $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$, torej je (**A**) res pravi odgovor.

II/A2. Označimo kote izjemnega enakokrakega trikotnika z α, α in γ. Tedaj je razlika med α in γ enaka $10°$. Imamo dve možnosti. Če je $\alpha > \gamma$, je $\alpha - \gamma = 10°$ in seveda $\alpha + \alpha + \gamma = 180°$. Od tod izračunamo $3\alpha = 190°$, torej je $\alpha = 63°20'$ in $\gamma = 53°20'$. Če pa je $\alpha < \gamma$, je $\gamma - \alpha = 10°$ in $\alpha + \alpha + \gamma = 180°$. Sledi $3\alpha = 170°$, torej je $\alpha = 56°40'$ in $\gamma = 66°40'$. Najmanjša možna vrednost najmanjšega kota je torej $53°20'$.

II/A3. Drugo ničlo racionaliziramo $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$. Predpisani rešitvi ima torej kvadratna enačba $\big(x - (1-\sqrt{2})\big)\big(x - (\sqrt{2}+1)\big) = 0$. Ko levo stran zmnožimo, dobimo $x^2 - 2x - 1 = 0$. Pravilen odgovor je (**D**).

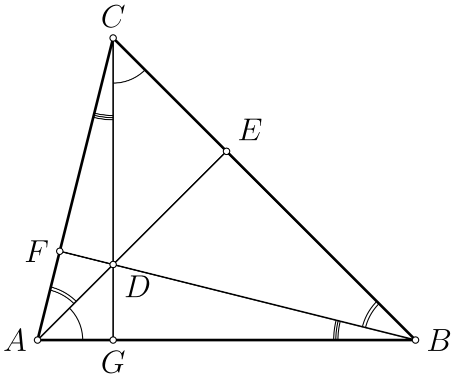
II/B1. Levo stran neenakosti zmnožimo, da dobimo $2a^3 - a^2b - ab^2 + 2b^3$, in jo razstavimo

$$\begin{aligned} 2a^3 - a^2b - ab^2 + 2b^3 &= 2(a^3+b^3) - ab(a+b) = 2(a+b)(a^2-ab+b^2) - ab(a+b) = \\ &= (a+b)(2a^2 - 3ab + 2b^2). \end{aligned}$$

Drugi faktor je nenegativen, saj velja $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 2(a^2 - \frac{3}{2}ab + b^2) = 2\big((a-\frac{3}{4}b)^2 + \frac{7}{16}b^2\big) \geq 0$. Torej mora biti bodisi $2\big((a-\frac{3}{4}b)^2 + \frac{7}{16}b^2\big) = 0$ in zato $a = b = 0$ ali pa $a+b \geq 0$. Neenakosti iz naloge ustrezajo vsi pari realnih števil a in b, za katere velja $a+b \geq 0$.

Izračun leve strani neenakosti $2a^3 - a^2b - ab^2 + 2b^3$ **.......... 1 točka**
Izpostavitev faktorja $a+b$ **.......... 2 točki**
Ugotovitev, da je drugi faktor $2a^2 - 3ab + 2b^2$ **nenegativen .... 2 točki**
Ugotovitev, da neenakosti ustrezajo pari realnih števil a **in** b**, za katere velja** $a+b \geq 0$ **.......... 2 točki**
(Za pravilno ugotovljeno rešitev brez ustreznega dokaza se dodeli 1 točka.)

II/B2.



Označimo z E presečišče premic AD in BC, z F presečišče premic BD in CA ter z G presečišče premic CD in AB. Ker je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$, sta trikotnika GAD in ECD podobna, saj imata dva skladna kota. Torej je

$$\frac{|GD|}{|AD|} = \frac{|ED|}{|CD|}.$$

Podobno iz enakosti $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC$ sledi, da sta tudi trikotnika FAD in EBD podobna, zato velja

$$\frac{|AD|}{|FD|} = \frac{|BD|}{|ED|}.$$

Če zgornji dve enakosti zmnožimo, dobimo

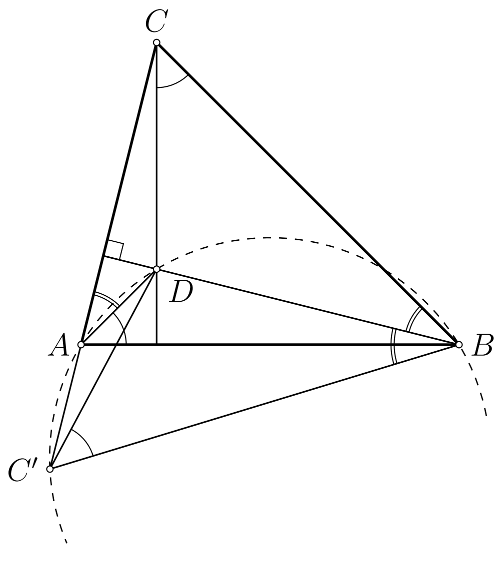
$$\frac{|GD|}{|FD|} = \frac{|BD|}{|CD|} \quad \text{oziroma} \quad \frac{|GD|}{|BD|} = \frac{|FD|}{|CD|}.$$

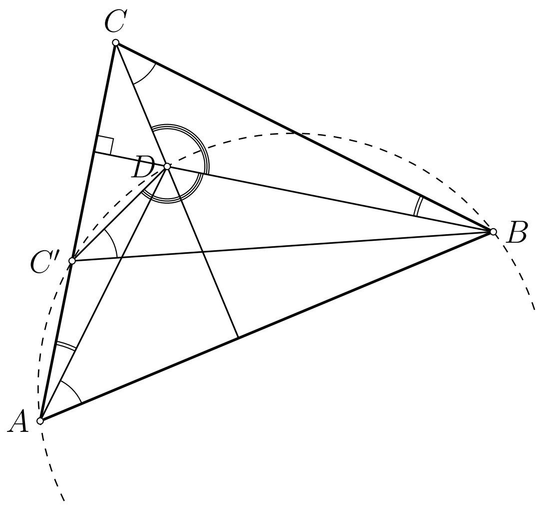
Ker je hkrati $\sphericalangle GDB = \sphericalangle CDF$, sledi, da sta tudi trikotnika GDB in FDC podobna, torej je $\sphericalangle DBG = \sphericalangle FCD$ oziroma $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ACD$. Od tod in iz podatkov naloge sledi

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA = \frac{1}{2}\big(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA\big) = 90^\circ,$$

torej je $\sphericalangle AEB = 180^\circ - \big(\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA\big) = 90^\circ$, kar je bilo potrebno pokazati.

2. način.





Naj bo C' zrcalna slika točke C pri zrcaljenju preko premice BD. Torej je $\sphericalangle BC'D = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BAD$. Poleg tega točki A in C' ležita na istem bregu premice BD, saj točka D leži znotraj trikotnika ABC. Od tod sledi, da so točke A, B, D in C' koniciklične.

Ločimo dva primera. Če točki C' in D ležita na nasprotnih bregovih premice AB, potem velja $\sphericalangle C'AD = 180° - \sphericalangle DBC' = 180° - \sphericalangle CBD = 180° - \sphericalangle DAC$. V tem primeru so torej točke C', A in C kolinearne. Če pa točki C' in D ležita na istem bregu premice AB, potem iz dejstva, da točki točki A in C' ležita na istem bregu premice BD, sledi, da točki A in D ležita na nasprotnih bregovih premice BC'. Torej velja $\sphericalangle BAC' = 180° - \sphericalangle C'DB = 180° - \sphericalangle BDC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC$. Tudi v tem primeru so točke C', A in C kolinearne.

Ker je premica CC' po definiciji točke C' pravokotna na premico BD, sklepamo, da je premica BD višina trikotnika ABC. Zaradi simetrije lahko na enak način dokažemo, da je tudi premica CD višina trikotnika ABC. To pa pomeni, da je D višinska točka trikotnika ABC, zato je tudi premica AD pravokotna na premico BC.

1. način:

Ugotovitev podobnosti $\triangle GAD$ in $\triangle ECD$ .... 1 točka

Ugotovitev podobnosti $\triangle FAD$ in $\triangle EBD$ .... 1 točka

Zapis razmerij $\frac{|GD|}{|AD|} = \frac{|ED|}{|CD|}$ in $\frac{|AD|}{|FD|} = \frac{|BD|}{|ED|}$ .... 1 točka

Ugotovitev podobnosti trikotnikov $\triangle GDB$ in $\triangle FDC$ .... 2 točki

Izračun $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA = 90°$ .... 1 točka

Ugotovitev $\sphericalangle AEB = 90°$ in zaključek, da sta premici AD in BC pravokotni .. 1 točka

2. način:

Zrcaljenje točke C preko premice BD v C' .... 1 točka

Ugotovitev, da so točke A, B, D, C' koniciklične .... 1 točka

Obravnavanje obeh primerov, glede na položaj točke C' in D .... 3 točke

(Če tekmovalec obravnava le eno konstrukcijo, se mu dodeli največ 2 točke)

Ugotovitev, da je točka D višinska točka in posledično premici AD in BC pravokotni .... 2 točki

II/B3.

Najprej opazimo, da, če zapišemo števili v dve sosednji polji vrstice oziroma stolpca, potem so števila, ki jih moramo zapisati v preostala polja te vrstice oziroma stolpca, enolično določena.

Če znamo tabelo izpolniti na pravilen način, potem bo ostala pravilno izpolnjena tudi, če števila 1, 2 in 3 med sabo poljubno premešamo. Števila $1, 2, 3$ lahko med sabo premešamo na 6 različnih načinov, to so $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ in $(3, 2, 1)$. Torej je dovolj, da preštejemo le tiste pravilno izpolnjene tabele, ki imajo v prvih treh poljih prve vrstice po vrsti zapisana števila $1, 2, 3$, rezultat pa bomo potem pomnožili s 6. Če v prva tri polja prve vrstice zapišemo po vrsti števila 1, 2 in 3, potem imamo za prvo polje v drugi vrstici dve možnosti, 2 ali 3. V obeh primerih je preostanek zgornjega levega 3×3 kvadrata tabele enolično določen

1	2	3
2	3	1
3	1	2

oziroma

1	2	3
3	1	2
2	3	1

.

Po zgornji opazki je potem enolično določen tudi preostanek tabele. V prvem primeru bodo na vsaki diagonali, ki potekajo desno-navzgor, enaka števila, isto število pa se bo ponovilo vsake 3 diagonale. V drugem primeru pa bodo na vsaki diagonali, ki poteka desno-navzdol enaka števila, isto število pa se bo ponovilo na vsake 3 diagonale. V obeh primerih bo torej tabela pravilno izpolnjena, saj nobena domina ne more prekriti dveh enakih števil.

Tako lahko torej tabelo izpolnimo na dva različna načina, če pa upoštevamo še premešanja, je vseh možnih načinov $2 \cdot 6 = 12$.

Utemeljitev, da je izpolnitev tabele določena že s števili v 3×3 kvadratu in da 2 števili v domini določata tretjo . . . . 2 točki
Ugotovitev, da lahko števila 1, 2 in 3 v vodoravni domini zapišemo na 6 načinov . . . . 1 točka
Utemeljitev, da premešanje števil 1, 2 in 3 ne vpliva na veljavnost izpolnitve tabele . . . . 1 točka
Najdba dveh izpolnitev, ki jih porodi ena osnovna vodoravna domina . . . . 2 točki
Utemeljitev, da zgornja načina izpolnjevanja predstavljata veljavno izpolnitev tabele . . . . 1 točka

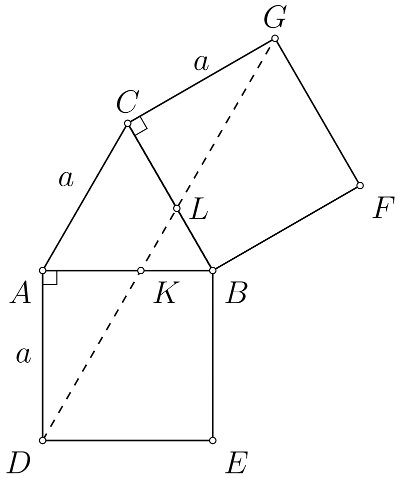
60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
C	C	A

III/A1.



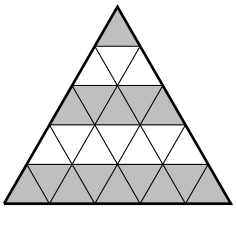
Označimo presečišči daljice DG s stranicama AB in BC zaporedoma s K in L. Zaradi simetrije je daljica DG vzporedna stranici AC. Torej je trikotnik KBL enakostraničen, trikotnika DKA in LGC pa sta polovici enakostraničnih trikotnikov z višinama dolžine a in stranicama $|DK| = |GL| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Stranica enakostraničnega trikotnika KBL je zato dolga

$$|KL| = a - |AK| = a - \frac{|DK|}{2} = a - \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Dolžina daljice DG je enaka

$$|DG| = 2|DK| + |KL| = \frac{4a}{\sqrt{3}} + \left(a - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a + \frac{3a}{\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})a.$$

III/A2.



Enakokrak trikotnik na sliki razdelimo na manjše skladne trikotnike, tako da dorišemo še črte vzporedne preostalima dvema stranicama. Potem je od 25 majhnih trikotnikov pobarvanih 15. Torej je pobarvanih $\frac{15}{25} = \frac{60}{100}$ trikotnika, kar je 60%.

III/A3. Enačba $x^2 + ax + 2 = 0$ ima diskriminanto $D = a^2 - 8 \geq 0$ in rešitvi $x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-8}}{2}$, za kateri velja $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 4$. Enačba $x^2 + 2x + a = 0$ ima diskriminanto $D = 4 - 4a \geq 0$ in rešitvi $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4a}}{2}$, za kateri velja $x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2a$. Sledi $a^2 - 4 = 4 - 2a$, kar lahko preoblikujemo v $(a-2)(a+4) = 0$. Rešitev $a = 2$ ni prava, saj bi bila diskriminanta druge enačbe negativna, rešitev $a = -4$ pa ustreza vsem pogojem. Pravilen odgovor je (**A**).

III/B1. S prehodom na novo osnovo sistem enačb preoblikujemo do

$$\begin{aligned}\frac{\log x^2}{\log 3} + \frac{\log y^3}{\log 2} &= 1,\\ \frac{\log x^4}{\log 9} + \frac{\log y^9}{\log 4} &= 2.\end{aligned}$$

Opazimo, da mora biti število y nujno pozitivno, zato je $\log y^3 = 3\log y$ in $\log y^9 = 9\log y$. Število x pa je lahko tudi negativno, zato velja $\log x^2 = 2\log|x|$ in $\log x^4 = 4\log|x|$. Če upoštevamo še $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$ in $\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3$, lahko sistem enačb zapišemo kot

$$\begin{aligned}\frac{2\log|x|}{\log 3} + \frac{3\log y}{\log 2} &= 1,\\ \frac{4\log|x|}{2\log 3} + \frac{9\log y}{2\log 2} &= 2.\end{aligned}$$

Sistem najlažje rešimo, če prvo enačbo odštejemo od druge, saj se člena z $\log|x|$ pokrajšata in dobimo $\frac{3\log y}{2\log 2} = 1$. Od tod izračunamo $\log y = \frac{2}{3}\log 2 = \log 2^{\frac{2}{3}}$, torej je $y = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$. Če $\log y = \frac{2}{3}\log 2$ vstavimo v prvo enačbo, dobimo še $\frac{2\log|x|}{\log 3} = -1$, od koder izrazimo $\log|x| = -\frac{1}{2}\log 3 = \log 3^{-\frac{1}{2}}$. Torej je $|x| = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oziroma $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. način. Označimo $a = \log_3 x^2$ in $b = \log_2 y^3$. Tedaj je

$$\log_9 x^4 = \frac{\log_3 x^4}{\log_3 9} = \frac{2\log_3 x^2}{2} = a \qquad \text{in} \qquad \log_4 y^9 = \frac{\log_2 y^9}{\log_2 4} = \frac{3\log_2 y^3}{2} = \frac{3}{2}b.$$

Ko to vstavimo v prvotni enačbi, dobimo enačbi $a + b = 1$ in $a + \frac{3}{2}b = 2$. Prvo enačbo odštejemo od druge, da dobimo $\frac{1}{2}b = 1$ oziroma $b = 2$. Iz prve enačbo izračunamo še $a = -1$. Iz $\log_3 x^2 = -1$ sledi $x^2 = \frac{1}{3}$ oziroma $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, iz $\log_2 y^3 = 2$ pa $y^3 = 4$ oziroma $y = \sqrt[3]{4}$.

1. način:

Prva enačba zapisana z novo osnovo: $\frac{\log x^2}{\log 3} + \frac{\log y^3}{\log 2} = 1$ .... **1 točka**

Druga enačba zapisana z novo osnovo: $\frac{\log x^4}{\log 9} + \frac{\log y^9}{\log 4} = 2$ .... **1 točka**

Preoblikovana prva enačba: $\frac{2\log|x|}{\log 3} + \frac{3\log y}{\log 2} = 1$ .... **1 točka**

Preoblikovana druga enačba: $\frac{4\log|x|}{2\log 3} + \frac{9\log y}{2\log 2} = 2$ .... **1 točka**

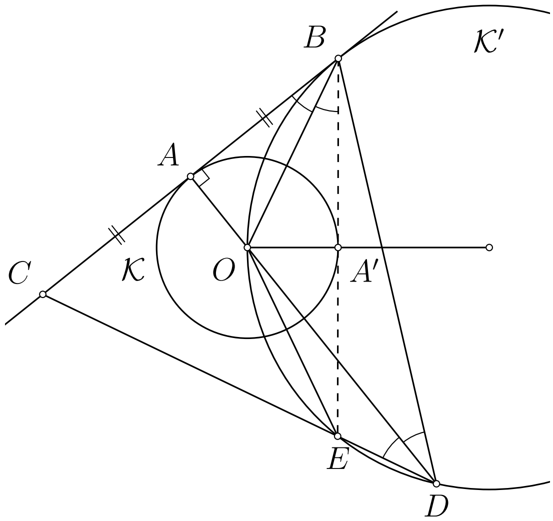
Rešitev za x in upoštevanje negativnosti: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ .... **1+1 točka**

Rešitev za y: $y = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ .... **1 točka**

2. način:

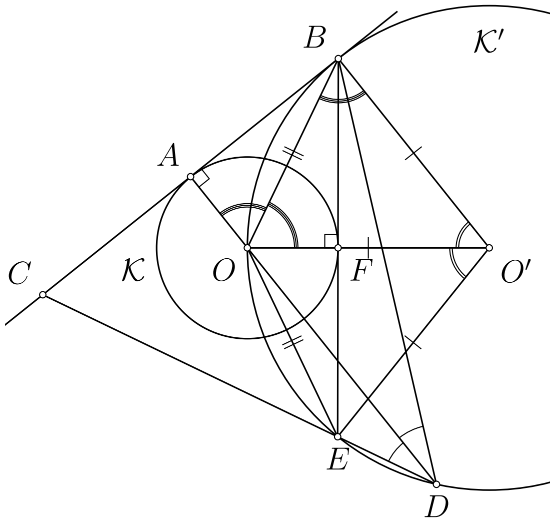
Zapis logaritmov, kjer nastopa x, z isto osnovo .... **1 točka**
Zapis logaritmov, kjer nastopa y, z isto osnovo .... **1 točka**
Preoblikovana prva enačba (npr. $a + b = 1$) .... **1 točka**
Preoblikovana druga enačba (npr. $a + \frac{3}{2}b = 2$) .... **1 točka**
Rešitev za x in upoštevanje negativnosti: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ .... **1+1 točka**
Rešitev za y: $y = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ .... **1 točka**

III/B2.



Tangenta iz točke B na krožnico $\mathcal{K}$ različna od tangente AB naj se krožnice $\mathcal{K}$ dotika v točki A'. Dokazali bomo, da so točke B, A' in E kolinearne.
Ker je $|AB| = |A'B|$ in $|AO| = |A'O|$, se trikotnika ABO in $A'BO$ ujemata v vseh treh stranicah in sta skladna. Sledi $\sphericalangle OBA' = \sphericalangle ABO$. Po izreku o kotu med tetivo in tangento za krožnico $\mathcal{K}'$ velja $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BDO$. Premica AB je tangentna na $\mathcal{K}$, zato je $\sphericalangle OAB = 90°$. Ker je $|AB| = |AC|$, se trikotnika ABD in ACD ujemata v dveh stranicah in kotu med njima. Zato sta skladna in sledi $\sphericalangle BDO = \sphericalangle BDA = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ODE$. Zaradi ujemanja kotov nad istim lokom znotraj krožnice $\mathcal{K}'$ velja $\sphericalangle ODE = \sphericalangle OBE$.
Dokazali smo $\sphericalangle OBA' = \sphericalangle OBE$, kar pomeni, da so točke B, A' in E kolinearne, zato je premica BE tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

2. način.



Naj bo O' središče krožnice $\mathcal{K}'$ in F presečišče premic OO' in BE. Dokazali bomo, da je premica BE pravokotna na OO', daljica OF pa radij krožnice $\mathcal{K}$.
Enako kot v prvi rešitvi velja, da sta trikotnika ABD in ACD skladna. Po izreku o središčnem in obodnem kotu za krožnico $\mathcal{K}'$ velja $\sphericalangle BO'O = 2\sphericalangle BDO = 2\sphericalangle ODE = \sphericalangle OO'E$. Ker je $|O'B| = |O'O| = |O'E|$, se trikotnika $O'BO$ in $O'EO$ ujemata v dveh stranicah in kotu med njima. Zato sta skladna in velja $|BO| = |EO|$. S tem smo dokazali, da je $OEO'B$ deltoid. Ker se diagonali deltoida sekata pravokotno, sledi $\sphericalangle BFO = 90°$.
Ker je AB tangentna tudi na krožnico $\mathcal{K}'$, trikotnik $O'BO$ pa je enakokrak, velja $\sphericalangle BOA = 90° - \sphericalangle ABO = \sphericalangle OBO' = \sphericalangle O'OB = \sphericalangle FOB$. Velja tudi $\sphericalangle OAB = 90° = \sphericalangle BFO$. Torej se trikotnika ABO in FBO ujemata v kotih in skupni stranici BO. Zato sta skladna in sledi $|OF| = |OA|$.
Dokazali smo, da je OF radij krožnice $\mathcal{K}$, premica BE pa je nanj pravokotna v točki F. Zato je BE tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

1. način:
Vpeljava dotikališča druge tangente iz B na krožnico $\mathcal{K}$ (t.j. točka A') ...... 1 točka
Ugotovitev $\sphericalangle ABO = OBA'$ .... 1 točka
Skladnost trikotnikov ABD in ACD ali ugotovitev, da je BCD enakokrak trikotnik .... 1 točka
Ugotovitev $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BDO$ .... 2 točki
Ugotovitev $\sphericalangle OBE = \sphericalangle ODE$ .... 1 točka
Utemeljitev, da so točke B, A' in E kolinearne .... 1 točka
2. način:
Vpeljava presečišča premic BE in OO' (t.j. točka F) .... 1 točka
Skladnost trikotnikov ABD in ACD ali ugotovitev, da je BCD enakokrak trikotnik .... 1 točka
Skladnost trikotnikov $O'BO$ in $O'EO$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je $BE \perp OO'$ .... 1 točka
Skladnost trikotnikov OAB in OFB .... 2 točki
Utemeljitev, da je BF tangentna na krožnico $\mathcal{K}$ .... 1 točka

III/B3. V prvi vrstici in prvem stolpcu tabele je skupaj $n + (n-1) = 2n - 1$ polj. Ta polja lahko Katja pobarva na 2^{2n-1} različnih načinov, saj ima za vsako polje na voljo dve barvi. Pokažimo, da lahko Katja, neglede na to, kako pobarva prvo vrstico in prvi stolpec, potem pobarva preostanek tabele na en sam pravilen način. Denimo torej, da je Katja že pobarvala prvo vrstico in prvi stolpec tabele. Postavimo domino v zgornji levi kot tabele, tako da prekrije tri že pobarvana polja. Če je izmed teh treh polj liho mnogo črnih, potem mora Katja četrto polje, pokrito z domino, pobarvati zeleno, če pa je izmed teh treh polj sodo mnogo črnih, mora Katja četrto polje, pokrito z domino, pobarvati črno. V obeh primerih lahko četrto polje, to je 2. polje v 2. stolpcu, pobarva na en sam način. Denimo, da je tudi to polje že pobarvala, in pomaknimo domino eno vrstico nižje. Ker domina spet pokriva tri že pobarvana polja, lahko zgornji sklep ponovimo, in ugotovimo, da lahko Katja pobarva 3. polje v 2. stolpcu na en sam pravilen način. Podobno sklepamo, da lahko tudi 4. polje in nato vsako naslednje polje v 2. stolpcu pobarva na en sam način. Torej lahko Katja 2. stolpec pobarva na en sam način. Ko je enkrat 2. stolpec cel pobarvan, se pomaknemo za en stolpec v desno in ponovimo sklep na 3. stolpcu. Katja lahko torej 3. stolpec pobarva na en sam način. Podobno sklepamo, da lahko Katja tudi 4. stolpec in potem vsak naslednji stolpec pobarva na en sam način. Torej, če Katja pobarva prvo vrstico in prvi stolpec na poljuben način, potem lahko preostanek tabele pobarva na en sam način. Barvanje, ki ga tako dobi, res ustreza pogoju, saj smo se pri sklepanju pomikali po eno vrstico in po en stolpec, torej smo spotoma preverili vse možne postavitve domine na tabelo.

2. način. Katja lahko 2×2 kvadratek pobarva na 8 različnih načinov.

Denimo, da je že pobarvala $(n-1) \times (n-1)$ kvadrat. Sedaj bi rada dopolnila še eno vrstico in en stolpec. Ne glede na to, kako je pobarvan že pobarvan kvadrat, lahko pobarva 2×2 kvadratek z dvema nepobarvanima poljema na dva načina; če sta obe že pobarvani polji črni, se lahko odloči, katero od nepobarvanih polj bo zeleno in katero črno, če pa je od pobarvanih polj eno zeleno in en črno, lahko preostali polji pobarva obe zeleno ali obe črno. To lahko neodvisno naredi z 2×2 kvadratkoma v nasprotnih kotih. Po enakem argumentu kot zgoraj so vsa ostala nepobarvana polja s tem določena, torej je možnosti za $n\ timesn$ tabelo štirikrat toliko kot za $(n-1) \times (n-1)$ tabelo. Barvanje je res pravilno po enakem argumentu kot zgoraj. Iz rekurzivne zveze in začetnega pogoja dobimo, da je možnosti za $n \times n$ tabelo 2^{2n-1}.

3. način. Vsak 2×2 kvadratek lahko pobarvamo na 8 načinov. Denimo, da smo že pobarvali zgornji levi koten 2×2 kvadratek. Potem lahko 2×1 domino desno od njega pobarvamo na 2 načina in tako nadaljujemo do konca prvega $2 \times n$ pasu. Podobno lahko 1×2 polje pod prvim 2×2 kvadratkom pobarvamo na 2 načina. Polje na mestu $(3,3)$ je sedaj enolično določeno, kot so tudi vsa polja desno od njega, saj je četrto polje v 2×2 kvadratku enolično določeno s preostalimi tremi. Postopek ponavljamo do konca vsakega pasu in v vsaki vrstici. Skupno dobimo 2^{2n-1} možnosti. Barvanje je tudi res pravilno, saj smo sproti preverili vse postavitve 2×2 kvadratkov.

4. način. Vsak 2×2 kvadratek lahko pobarvamo na 8 načinov. Denimo, da smo že pobarvali zgornji levi koten 2×2 kvadratek. Potem lahko 2×2 kvadratek spodaj desno (po diagonali), ki se z že pobarvanim ujema v zgornjem levem kvadratku, pobarvamo na 4 različne načine. Ta postopek ponavljamo po diagonali navzdol, na vsakem koraku pridobimo 4 načine barvanja kvadratka. Diagonalo iz 2×2 kvadratkov lahko torej pobarvamo na $8 \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{n-2} = 2^{2n-1}$ načinov. Četrto polje v 2×2 kvadratku je enolično določeno s preostalimi tremi. Nepobarvani del tabele lahko enolično pobarvamo tako, da vsakemu nepobarvanemu kvadratku določimo barvo preko 2×2 kvadratka s tremi že pobarvanimi polji (začnemo pri diagonali in barvamo polja v ostale smeri). Tako dobljeno barvanje je pravilno, saj smo sproti preverili vse postavitve 2×2 kvadratkov.

1. način:
Ugotovitev, da trije pobarvani kvadratki v 2×2 kvadratku enolično določajo četrtega 2 točki
Eno vrstico in en stolpec lahko pobarvamo poljubno, torej na 2^{2n-1} načinov . . 2 točki
Konstrukcija in utemeljitev enoličnosti barvanja če že imamo pobarvan en stolpec in eno vrstico . . . . 2 točki
Utemeljitev, da je dobljeno barvanje pravilno . . . . 1 točka
2. način:
2×2 tabelo se da pobarvati na 8 načinov . . . . 1 točka
Če sta dve polji nepobarvani, imamo 2 načina za dopolnitev . . . . 1 točka
Neodvisno lahko pobarvamo dva 2×2 kvadratka v nasprotnih kotih $n \times n$ tabele, kjer je $(n-1) \times (n-1)$ podtabela že pobarvana . . . . 1 točka
tri polja enolično določajo četrtega . . . . 2 točki
izpeljava rekurzivne zveze do rezultata . . . . 1 točka
Utemeljitev, da je barvanje pravilno . . . . 1 točka
3. način:
8 načinov za 2×2 kvadratek . . . . 1 točka
2 že pobarvana kvadratka dobuščata dve možnosti dopolnitve . . . . 1 točka
3 že pobarvani kvadratki dopuščajo eno dopolnitev . . . . 2 točki
Dopolnitev prvega $2 \times n$ pasu . . . . 1 točka
Dopolnitev nadaljnih vrstic . . . . 1 točka
Rezultat in pravilnost barvanja . . . . 1 točka
4. način:
8 načinov za 2×2 kvadratek . . . . 1 točka
1 pobarvan kvadratek znotraj 2×2 kvadratka določa 4 barvanja . . . . 1 točka
3 že pobarvani kvadratki dopuščajo eno dopolnitev . . . . 2 točki
Barvanje 2×2 diagonale . . . . 1 točka
Dopolnitev nadaljnih polj tabele . . . . 1 točka
Rezultat in pravilnost barvanja . . . . 1 točka
Dodatek (če rešitev ni pravilna):
Uspešno najdeni vsaj 2 različni pravilni barvanji $n \times n$ tabele . . . . 1 točka

60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
D	B	D

IV/A1. Naj bo n število iger, ki jih je odigral Cene. Skupno število vseh odigranih iger je tedaj $\frac{17+23+n}{2}$, od koder sledi, da je n sodo število. Skupaj je bilo odigranih vsaj 23 iger, saj jih je toliko odigral Blaž. Ker pa je Cene počival kvečjemu po eno igro zapored, je moral odigrati vsaj 11 iger oziroma 12 iger, saj je odigral sodo mnogo iger. Torej je skupno število odigranih iger vsaj $\frac{17+23+12}{2} = 26$. To pa spet pomeni, da je Cene odigral vsaj 13 iger oziroma zaradi parnosti vsaj 14 iger. V tem primeru je bilo iger Andrej-Blaž $\frac{17+23-14}{2} = 13$, iger Andrej-Cene $\frac{17+14-23}{2} = 4$ in iger Blaž-Cene $\frac{23+14-17}{2} = 10$. Primer, ki pokaže, da je to tudi res mogoče, je na primer zaporedje tekem C-A, A-B, B-C, B-A, A-C, A-B, B-C, B-A, A-C, A-B, B-C, B-A, A-C, A-B, B-C, B-A, B-C, B-A, B-C, B-A, B-C, B-A, B-C, B-A, B-C, B-A, B-C, kjer smo zapisali le začetnice imen igralcev. Pravilen odgovor je (**D**).

IV/A2. Ker je vsota vsakih treh zaporednih členov zaporedja enaka, velja $a_{n+3} = a_n$ za vsak n. Od tod sledi $a_{667} = a_{667+3\cdot 449} = a_{2014}$ in $a_{1004} = a_{1004+3\cdot 337} = a_{2015}$. Ker je $a_{2014} + a_{2015} + a_{2016} = 2016$, je $a_{2016} = 2016 - 667 - 1004 = 345$.

IV/A3. Naj bo S središče krožnice. Tedaj je trikotnik SBA enakostraničen, saj ima vse tri stranice dolge 1. Torej je $\sphericalangle BSA = 60°$. Po izreku o središčnem kotu je $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\sphericalangle BSA = 30°$. Ker je zunanji kot trikotnika vedno enak vsoti obeh nepriležnih notranjih kotov trikotnika, sledi $\sphericalangle CBD = 45° + 30° = 75°$.

IV/B1. Iz druge enačbe izrazimo $d = 2a + 4b + 6c - 26$ in vstavimo v prvo enačbo, da dobimo

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 4b + 6c - 13.$$

Vse člene postavimo na levo stran $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c + 13 = 0$ in dopolnimo do popolnih kvadratov

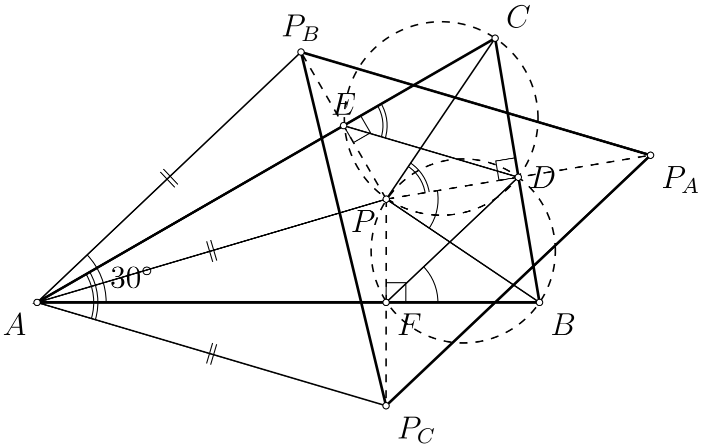
$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 1.$$

Ker so vsi trije popolni kvadrati nenegativna cela števila, je eden od njih enak 1, druga dva pa sta enaka 0. Če je $(a-1)^2 = 1$, sledi $a = 0$ ali $a = 2$ ter $b = 2$ in $c = 3$. Če je $(b-2)^2 = 1$, sledi $b = 1$ ali $b = 3$ ter $a = 1$ in $c = 3$. Če pa je $(c-3)^2 = 1$, sledi $c = 2$ ali $c = 4$ ter $a = 1$ in $b = 2$. V vsakem posameznem primeru iz zgornje enačbe izračunamo še d. Celoštevilske rešitve (a, b, c, d) danega sistema so torej $(0, 2, 3, 0)$, $(2, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 3, -2)$, $(1, 3, 3, 6)$, $(1, 2, 2, -4)$ in $(1, 2, 4, 8)$.

Eliminacija d .... 1 točka
Dopolnitev do popolnih kvadratov .... 2 točki
Uporaba dejstva, da so $(a-1)^2, (b-2)^2, (c-3)^2 \geq 0$ .... 1 točka
Izračun vseh rešitev .... 3 točke
Ena manjkajoča rešitev .... -1 točka
Dve ali tri manjkajoče rešitve .... -2 točki

(Za pravilno ugotovljeno rešitev brez ustreznega dokaza se dodeli 1 točka.)

IV/B2.



Naj bodo D, E in F zaporedoma presečišča daljic PP_A, PP_B in PP_C s stranicami BC, CA in AB. Točke D, E in F so hkrati tudi razpolovišča daljic PP_A, PP_B in PP_C, zato sta si trikotnika DEF in $P_AP_BP_C$ podobna. Torej je tudi trikotnik DEF enakostraničen in velja $\sphericalangle EDF = 60°$.

Ker je $\sphericalangle PEC = 90°$ in $\sphericalangle CDP = 90°$, so točke P, D, C in E konciklične. Torej velja $\sphericalangle DPC = \sphericalangle DEC$. Podobno so tudi točke B, D, P in F konciklične in velja $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BFD$. Od tod sledi $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPD + \sphericalangle DPC = \sphericalangle BFD + \sphericalangle DEC = (180° - \sphericalangle DFA) + (180° - \sphericalangle AED) = 360° - \sphericalangle DFA - \sphericalangle AED = \sphericalangle EDF + \sphericalangle FAE = 60° + 30° = 90°$.

2. način. Kot v prvi rešitvi pokažemo, da so točke P, D, C in E konciklične. Ker sta P_B in P_C zrcalni sliki točke P pri zrcaljenju preko premic CA in AB, velja $|AP_B| = |AP| = |AP_C|$. Torej je trikotnik AP_CP_B enakokrak z vrhom pri A. Poleg tega velja $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CAP_B$ in $\sphericalangle P_CAB = \sphericalangle BAP$. Zato je $\sphericalangle P_CAP_B = 2\sphericalangle BAC = 60°$. To pomeni, da je trikotnik AP_CP_B enakostraničen. Ker pa je po predpostavki tudi trikotnik $P_AP_BP_C$ enakostraničen, je štirikotnik $AP_CP_AP_B$ romb, zato sta premici AP_C in P_AP_B vzporedni. Prav tako sta vzporedni tudi premici DE in P_AP_B, saj sta točki D in E razpolovišči daljic PP_A in PP_B. Torej sta tudi premici DE in AP_C vzporedni. Od tod in iz koncikličnosti točk P, D, C in E sledi $\sphericalangle DPC = \sphericalangle DEC = \sphericalangle P_CAC$. Zaradi simetrije lahko na enak način pokažemo, da je tudi $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BAP_B$. Z upoštevanjem obeh enakosti dobimo $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPD + \sphericalangle DPC = \sphericalangle BAP_B + \sphericalangle P_CAC = \sphericalangle P_CAP_B + \sphericalangle BAC = 30° + 60° = 90°$.

1. način:

Ugotovitev, da sta trikotnika $\triangle DEF$ in $\triangle P_AP_BP_C$ podobna .... **1 točka**

Sklep, da je $\sphericalangle EDF = 60°$ .... **1 točka**

Ugotovitev, da so točke P, D, C in E konciklične .... **1 točka**

Ugotovitev, da so točke B, D, P in F konciklične .... **1 točka**

Zapis $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPD + \sphericalangle DPC$ .... **1 točka**

Izračun $\sphericalangle BPC = 90°$ .... **2 točki**

2. način:

Ugotovitev, da so točke P, D, C in E konciklične .... **1 točka**

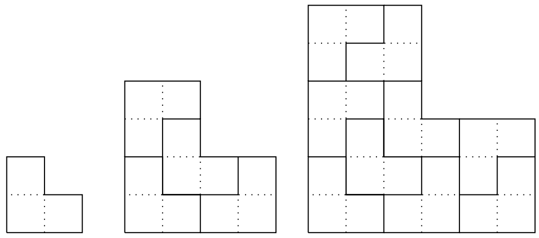
Ugotovitev, da je trikotnik $\triangle AP_CP_B$ enakostraničen .... **1 točka**

Ugotovitev, da je $AP_C \parallel P_AP_B$ in $P_AP_B \parallel DE$ .... **1 točka**

Izračun $\sphericalangle DPC = \sphericalangle P_CAC$ .... **1 točka**

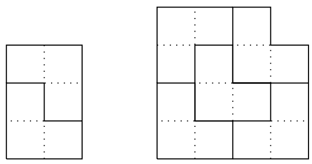
Izračun $\sphericalangle BPD = \sphericalangle BAP_B$ .... **1 točka**
Zapis $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPD + \sphericalangle DPC$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle BPC = 90^\circ$ .... **1 točka**

IV/B3. Uporabili bomo indukcijo po n. Za $n = 1$, $n = 2$ in $n = 3$ figuro tlakujemo kot je prikazano na sliki.



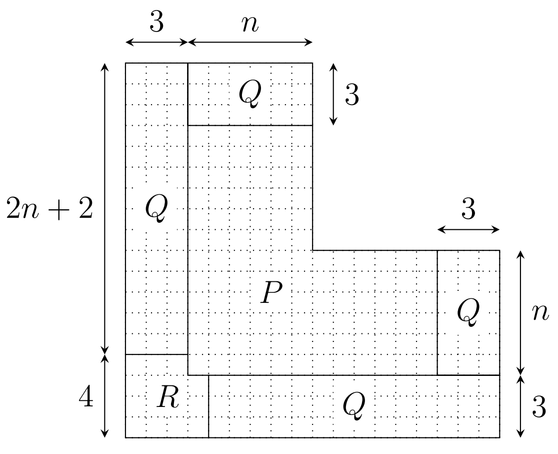
$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

V indukcijskem koraku bomo n povečali za 3. Vzemimo torej figuro za $n + 3$ in ločimo dva primera, glede na parnost števila n. V obeh primerih figuro razdelimo na več območij, kot je prikazano na slikah.

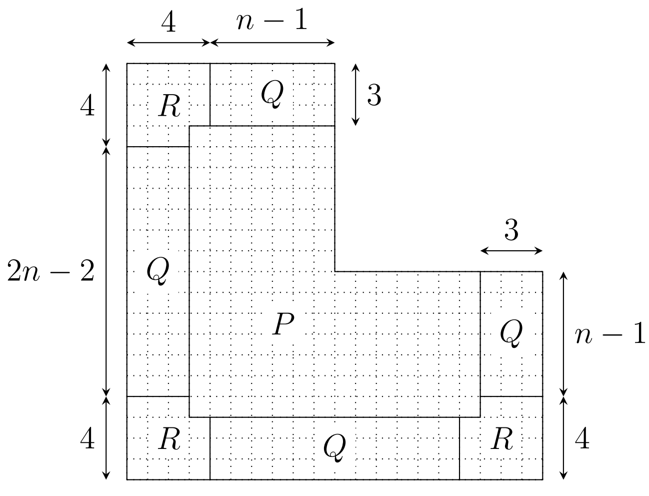


Vzorec A. $\quad$ Vzorec B.

Območje P je v obeh primerih figura za n, zato ga po indukcijski predpostavki znamo tlakovati. Vsa območja R na obeh slikah so enaka in jih lahko tlakujemo z vzorcem B prikazanim spodaj. Območja Q med seboj niso enaka, so pa vsa velikosti $3 \times 2k$ za neka naravna števila k, zato jih lahko tlakujemo s k vzorci A



Tlakovanje pri sodem n.



Tlakovanje pri lihem n.

Dano figuro lahko torej z dano domino tlakujemo za vsako naravno število n.

Ugotovitev, da je število polj deljivo s 3 in zato lahko omogoča tlakovanje ....0 točk
Tlakovanje osnovnih primerov (vsaj $n \leq 3$) ....1 točka
Odkritje manjših vzorcev za tlakovanje in ugotovitev, da se da poljuben lik $3 \times 2k$ za poljubno naravno število k tlakovati s figuro ....1 točka
Napisana in dokazana indukcija za P (manjše različice lika) ....1 točka
Tlakovanje za sod n ....2 točki
Tlakovnaje za lih n ....2 točki
(V primeru, da tekmovalec velikost smiselno razdeli na drugačne večkratnike se točkuje sorazmerno z deležom obravnavanih primerov, v primeru drugih delitev smo posebno pozorni, da res pojasni, zakaj imajo deli, ki jih dobi pri delitvi tlakovanje s figuro (del oblike $(3k + 1) \times 2$ nima primernega tlakovanja).)
(V kolikor tekmovalec indkucijo dokaže pravilno za drugačen razpon med n in ne obravnava dovolj baznih primerov, a indukcijo dokaže pravilno, se mu odbije zgolj ena točka za manjkajoče primere.)