Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

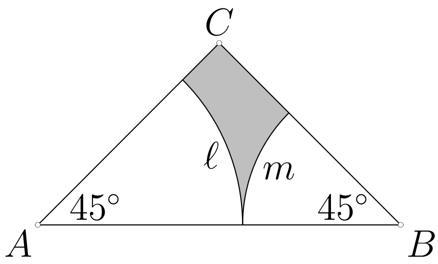
Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
31. marec 2004

Naloge za 1. letnik

1. Poišči vsa naravna števila m in n, ki zadoščajo enačbi $\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1$.

2. Dan je enakokrak pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri C in kateto dolžine 2. Krožni lok ℓ s središčem v A razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela, krožni lok m s središčem v B pa se dotika krožnega loka ℓ v točki na hipotenuzi AB. Kolikšna je ploščina osenčenega lika?



3. Pravokotnik $ABCD$ ima stranico AB dolgo $2a$, stranico AD pa a. Označimo razpolovišče stranice AB z E in izberimo poljubno točko F na stranici AD. Ploščina trikotnika ECF je odvisna od izbire točke F. Kolikšna je najmanjša in kolikšna največja ploščina trikotnika ECF, ko lego točke F spreminjamo?

4. Poišči vse rešitve enačbe $x = \Big|2x - |60 - 2x|\Big|$.

5. Nika in Tim sta igrala karte. Neodločen izid ni bil možen. Vnaprej sta se dogovorila, da bo zmagovalec posamezne igre dobil več točk kot poraženec in da bo poraženec dobil pozitivno število točk. Določila sta, koliko točk bo po posamezni igri dobil zmagovalec in koliko poraženec. Po nekaj igrah je imela Nika 30 točk, Tim, ki je dobil 2 igri, pa 25 točk. Koliko točk je dobil zmagovalec posamezne igre?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
31. marec 2004

Naloge za 2. letnik

1. Ali obstaja pravokotni trikotnik s celoštevilskimi dolžinami stranic, pri katerem sta dolžini obeh katet praštevili?

2. Poišči vsa trimestna števila, ki so enaka 30-kratniku vsote svojih števk.

3. Koliko je $\sqrt{2004 \cdot 2002 \cdot 1998 \cdot 1996 + 36}$?

4. Na ravnini ležijo take točke A, B, C in D, da velja $|AB| = |BC| = |AC| = |CD| = 10$ cm in $|AD| = 17$ cm. Koliko meri kot $\sphericalangle ADB$?

5. Matija je najprej po vrsti napisal vsa števila od 1 do 10000, nato pa izbrisal vsa števila, ki niso bila deljiva ne s 5 in ne z 11. Katero število je na 2004. mestu?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
31. marec 2004

Naloge za 3. letnik

1. (a) Koliko je 5^a, če je $a = \dfrac{\log_7 4\,(\log_7 5 - \log_7 2)}{\log_7 25\,(\log_7 8 - \log_7 4)}$?

   (b) Koliko je 5^b, če je $b = \dfrac{\log_{77} 4\,(\log_{77} 5 - \log_{77} 2)}{\log_{77} 25\,(\log_{77} 8 - \log_{77} 4)}$?

2. Koliko pozitivnih vrednosti lahko zavzame izraz

$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4,$$

   če so števila a_0, a_1, a_2, a_3 in a_4 iz množice $\{-1, 0, 1\}$?

3. Izračunaj vrednost izraza $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ$.

4. V množici A je 7 naravnih števil, ki niso večja od 20. Dokaži, da obstajajo taka 4 različna števila a, b, c in d iz množice A, da je število $a + b - c - d$ deljivo z 20.

5. Diagonale pravilnega petkotnika s stranico dolžine 1 tvorijo nov, manjši pravilen petkotnik. Koliko meri stranica manjšega petkotnika?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
31. marec 2004

Naloge za 4. letnik

1. Reši enačbo
$$\frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^4}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^5}}}} - \frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{1}{x^4+\frac{1}{x^3}}}}$$
v pozitivnih realnih številih.

2. Poišči vsa praštevila p, za katera sta tudi $p+28$ in $p+56$ praštevili.

3. Za katera naravna števila n lahko najdemo n zaporednih celih števil z vsoto n?

4. Koliko desetmestnih števil $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$, za katera velja, da je $a_1 = 1$ in je vsaka izmed števk a_2, a_3, $\ldots$, a_{10} enaka 0 ali 1, zadošča pogoju
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}?$$

5. V ravnini sta dani različni točki O in P. Naj bo $ABCD$ tak paralelogram, katerega diagonali se sekata v točki O, da točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD. Razpolovišči daljic AP in BP označimo z M oziroma N, presečišče premic MC in ND pa s Q. Dokaži, da so točke P, Q in O kolinearne ter da je lega točke Q neodvisna od izbire paralelograma $ABCD$.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

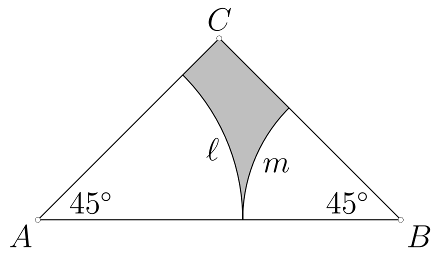
Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Enačbo $\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1$ preoblikujemo v $5m + 3n = mn$ oziroma $(m-3)(n-5) = 15$. Ker je $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ ter sta $m-3$ in $n-5$ celi števili, so možni pari $(m-3, n-5)$ enaki $(-1,-15)$, $(-3,-5)$, $(-5,-3)$, $(-15,-1)$, $(1,15)$, $(3,5)$, $(5,3)$ in $(15,1)$. V prvih štirih primerih ustrezna m in n nista oba hkrati pozitivna, drugi štirje primeri pa nam dajo rešitve $(4,20)$, $(6,10)$, $(8,8)$ in $(18,6)$.

Zapis enačbe $(m-3)(n-5) = 15$ ali ekvivalentne, iz katere je jasno, da imamo le končno mnogo rešitev: 3 točke. Popolna analiza primerov in vse 4 rešitve: 4 točke.

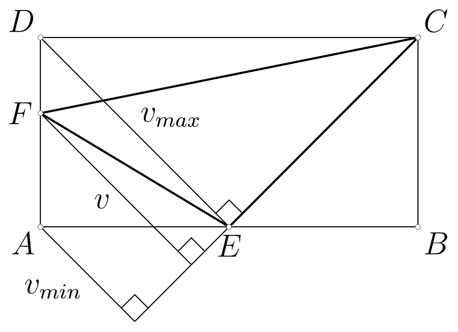
Če tekmovalec ne analizira vseh primerov, priznajte po 1 točko za vsaka 2 pravilno analizirana primera. Če tekmovalec samo navede vse pravilne rešitve, a ne dokaže, da so to vse: 2 točki.

I/2. Naj bo r polmer krožnega loka ℓ, ki izreže iz trikotnika izsek s središčnim kotom $45°$, to je osmino kroga. Ker lok ℓ razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela, velja $\frac{1}{8}\pi r^2 = 1$, od koder izračunamo $r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Polmer krožnega loka m je $r_1 = |AB| - r = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})$. Ploščino S osenčenega lika dobimo tako, da od polovice ploščine danega enakokrakega trikotnika odštejemo ploščino krožnega izseka, ki ga iz trikotnika izreže lok m: $S = 1 - \frac{1}{8}\pi \cdot 8\,(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})^2 = 1 - \pi(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi$.



Enačba $\frac{1}{8}\pi r^2 = 1$ ali ekvivalentna, iz katere lahko izračunamo polmer krožnega loka, ki razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela: 3 točke. Polmer drugega krožnega loka: 1 točka. Ploščina drugega krožnega izseka: 1 točka. Ploščina osenčenega dela: 2 točki.

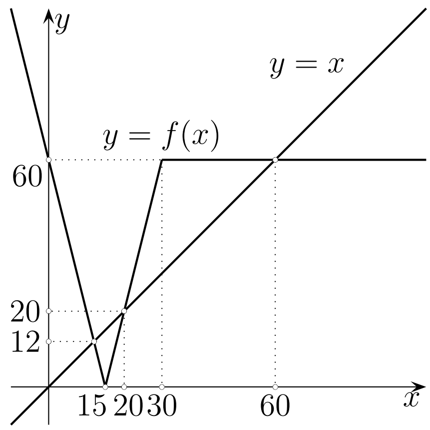
I/3. 1. način Ploščina trikotnika ECF je enaka $\frac{|EC| \cdot v}{2} = \frac{av\sqrt{2}}{2}$, kjer smo z v označili dolžino višine na stranico EC. Ker se višina daljša, ko točka F potuje od A proti D, se ploščina ustrezno veča. Ko je $F = A$, je $v_{min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ploščina trikotnika ECF pa najmanjša. Enaka je $\frac{a^2}{2}$, kar je četrtina ploščine pravokotnika $ABCD$. Ko je $F = D$, je $v_{max} = a\sqrt{2}$, ploščina trikotnika ECF pa največja. Tedaj je ploščina trikotnika ECF enaka a^2, kar je polovica ploščine pravokotnika $ABCD$.



2. način Če označimo $|FA| = x$, je ploščina trikotnika ECF enaka $2a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(a-x)2a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ax$. Ker je $a > 0$ in $0 \leq x \leq a$, je najmanjša ploščina trikotnika ECF enaka $\frac{1}{2}a^2$ in je dosežena pri $x = 0$, največja ploščina pa je enaka a^2 in je dosežena pri $x = a$.

Pravilno ugotovljena najmanjša ploščina: 2 točki. Pravilno ugotovljena največja ploščina: 2 točki. Geometrijska utemeljitev, da sta to res skrajni možnosti, ali eksplicitna formula za ploščino, v kateri nastopa 1 neodvisna spremenljivka: 3 točke.

I/4. Označimo $f(x) = |2x - |60 - 2x||$. Ker zavzame izraz $|2x - |60 - 2x||$ le nenegativne vrednosti, negativen x ne reši enačbe $x = f(x)$.
Oglejmo si najprej možnost $60 - 2x \geq 0$, ko je $x \leq 30$. Tedaj se enačba zapiše: $x = |2x - 60 + 2x|$ oziroma $x = |4x - 60|$. Ločimo 2 primera. Če je $4x - 60 \geq 0$, je $x \geq 15$, enačba pa se poenostavi v $x = 4x - 60$ in ima rešitev $x = 20$. Če je $4x - 60 < 0$, je $x < 15$, enačba pa se poenostavi v $x = -4x + 60$ in ima rešitev $x = 12$.
Preostane nam še možnost $60 - 2x < 0$, ko je $x > 30$. Tedaj se enačba zapiše: $x = |2x + 60 - 2x|$ oziroma $x = 60$, ki je še njena 3. rešitev.



Analiza primerov glede na notranjo in zunanjo absolutno vrednost: 2 + 2 = 4 točke. Vse rešitve: 1 + 1 + 1 = 3 točke.

I/5. Po nekaj igrah imata Nika in Tim skupaj $30 + 25 = 55$ točk. Denimo, da dobi zmagovalec posamezne igre m točk, poraženec pa n točk. Ker po vsaki igri dobita skupaj $m + n$ točk in sta odigrala več kot 2 igri, je $m + n = 11$ ali $m + n = 5$.
Če je $m + n = 5$, sta Nika in Tim odigrala 11 iger, od katerih je Tim dobil 2. Ker je $m > n > 0$, sta le 2 možnosti, in sicer $m = 4$, $n = 1$ ali $m = 3$, $n = 2$. Pri prvi možnosti bi Tim dobil $2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 17$ točk, pri drugi pa $2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 24$ točk, toda ne prvo ne drugo število točk ne ustreza podatku iz naloge.
Če je $m + n = 11$, sta Nika in Tim odigrala 5 iger, od katerih je Tim dobil 2. Tokrat imamo več možnosti, ki jih lahko zavzame par (m, n), in sicer $(10, 1)$, $(9, 2)$, $(8, 3)$, $(7, 4)$ in $(6, 5)$. Ker mora biti $2m + 3n = 25$, ugotovimo, da le par $(8, 3)$ ustreza pogoju. Torej je zmagovalec posamezne igre dobil $m = 8$ točk.

Pogoja $m + n = 11$, $m + n = 5$ ali ekvivalentna: 2 točki. Analiza primera $m + n = 5$: 2 točki. Analiza primera $m + n = 11$: 2 točki. Rešitev: $m = 8$: 1 točka.

Če tekmovalec samo navede rešitev $m = 8$, a iz postopka ni razvidno, da je to edina rešitev: 1 točka. Če tekmovalec pravilno analizira vse možne primere, lahko tudi analiza vseh možnosti $1 \leq m < \frac{25}{2}$: 7 točk.

II/1. Denimo, da sta dolžini katet a in b, dolžina hipotenuze pa c. Dolžini a in b ne moreta biti hkrati lihi praštevili, saj bi dobili $c^2 = (2k+1)^2 + (2j+1)^2 = 4(k^2 + j^2 + k + j) + 2$, kar ne more biti res ($c$ bi bilo sodo število, katerega kvadrat bi bil deljiv z 2 in ne s 4). Dolžini a in b tudi ne moreta biti hkrati sodi praštevili (torej enaki 2), saj bi dobili $c^2 = 4 + 4 = 8$, $c = \sqrt{8}$ pa ni celo število.

Preostane nam še možnost, da je dolžina ene katete sodo praštevilo (enako 2), dolžina druge pa liho praštevilo (večje ali enako 3). To pomeni, da je zaradi $c^2 = 4 + b^2$ dolžina hipotenuze liho število, večje ali enako 5. Toda $4 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) \geq 2 \cdot 8 = 16$ pokaže, da tudi ta možnost odpade. Pravokotnega trikotnika s celoštevilskimi dolžinami stranic, pri katerem bi bili dolžini katet praštevili, ni.

Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet lihi praštevili: 3 točke. Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet sodi praštevili: 1 točka. Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet različne parnosti: 3 točke.

Če tekmovalec brez utemeljitve zapiše, da takih trikotnikov ni: 0 točk.

II/2. Iščemo taka števila $\overline{xyz}$, za katera velja $100x + 10y + z = 30(x + y + z)$. Gotovo se 30-kratnik konča s števko 0, zato je $z = 0$. Potem je $100x + 10y = 30(x + y)$ oziroma $10x + y = 3(x + y)$. Od tod dobimo $7x = 2y$. Ker sta x in y števki, je možno le $x = 2$ in $y = 7$. Obstaja samo 1 trimestno število, ki je enako 30-kratniku vsote svojih števk, to je število 270.

Zapis enačbe $100x + 10y + z = 30(x + y + z)$ ali ekvivalentne: 2 točki. Ugotovitev $z = 0$: 1 točka. Sklep $x = 2$ in $y = 7$: 2 + 2 točki.

II/3. Označimo $a = 2000$. Tedaj je iskana vrednost enaka

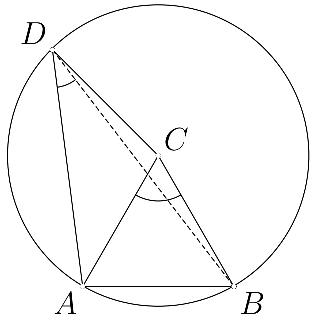
$$\begin{aligned}\sqrt{(a+4)(a+2)(a-2)(a-4)+36} &= \sqrt{(a^2-16)(a^2-4)+36} = \\ &= \sqrt{a^4 - 20a^2 + 64 + 36} = \sqrt{(a^2-10)^2} = \\ &= |a^2 - 10|.\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $a = 2000$, dobimo vrednost $2000^2 - 10 = 4\,000\,000 - 10 = 3\,999\,990$.

Prevedba na razliko kvadratov $(a^2 - 16)(a^2 - 4)$, lahko tudi brez vpeljave $a = 2000$: 3 točke. Zapis popolnega kvadrata $(a^2 - 10)^2$: 3 točke. Rezultat 3 999 990: 1 točka.

Če tekmovalec izraz pod korenom pravilno zmnoži, a izraza ne koreni: 2 točki. Če tekmovalec izraz pod korenom nepravilno zmnoži: 0 točk. Uporaba računala seveda ni dovoljena.

II/4. Ker je točka C enako oddaljena od točk A, B in D, ležijo točke A, B in D na krožnici s središčem C in polmerom 10 cm. Zaradi $|AB| = 10$ cm je trikotnik ABC enakostraničen in je $\sphericalangle ACB = 60°$. Ker je $|AD| > |AB|$, leži točka D na istem bregu premice AB kot točka C. Torej sta $\sphericalangle ADB$ in $\sphericalangle ACB$ obodni oziroma središčni kot nad istim lokom in je $\sphericalangle ADB = 30°$. (Na sliki je narisana ena izmed 2 možnih leg točke D.)



Koncikličnost točk A, B, D: 2 točki. Središčni kot $60°$: 1 točka. Obodni kot $30°$: 1 točka. Utemeljitev, da zaradi $|AD| > |AB|$ ležita C in D na istem bregu premice AB: 3 točke.

Če tekmovalec (napačno!) trdi, da je s pogoji naloge lega točke D enolično določena: največ 6 točk.

II/5. Ker je najmanjši skupni večkratnik števil 5 in 11 enak 55, je med števili od vključno 1 do vključno 55 natanko $11+5-1=15$ števil deljivih s 5 ali z 11. To so: $a_1=5$, $a_2=10$, $a_3=11$, $a_4=15$, $a_5=20$, $a_6=22$, $a_7=25$, $a_8=30$, $a_9=33$, $a_{10}=35$, $a_{11}=40$, $a_{12}=44$, $a_{13}=45$, $a_{14}=50$ in $a_{15}=55$. Ker je $2004=133\cdot 15+9$, je iskano število enako $133\cdot 55+a_9=133\cdot 55+33=7348$.

Ugotovitev, da je dobro opazovati bloke po 55 števil: 2 točki. Ugotovitev, da je med 1 in 55 natanko 15 števil deljivih s 5 ali 11 (lahko tudi implicitno tako, da so vsa ta števila našteta): 1 točka. Enakost $2004=133\cdot 15+9$ **ali ekvivalentna, ki pove, da moramo opazovati 9. število v bloku: 2 točki. Sklep** $133\cdot 55+a_9=7348$**: 2 točki.**

III/1. (a) Najprej poenostavimo eksponent:

$$a=\frac{\log_7 4\,(\log_7 5-\log_7 2)}{\log_7 25\,(\log_7 8-\log_7 4)}=\frac{\log_7 2^2\cdot\log_7\frac{5}{2}}{\log_7 5^2\cdot\log_7 2}=\frac{2\cdot\log_7 2\cdot\log_7\frac{5}{2}}{2\cdot\log_7 5\cdot\log_7 2}=\frac{\log_7\frac{5}{2}}{\log_7 5}.$$

Slednje se v osnovi 5 zapiše: $\dfrac{\frac{\log_5 \frac{5}{2}}{\log_5 7}}{\frac{\log_5 5}{\log_5 7}}=\log_5\dfrac{5}{2}$. Končno je: $5^a=5^{\log_5\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$.

(b) Iz rešitve (a) vidimo, da je rezultat neodvisen od osnove logaritma. Torej je $5^b=5^a=\frac{5}{2}$.

Izračun $a=\log_5\frac{5}{2}$**: 3 točke. Sklep** $5^a=\frac{5}{2}$**: 2 točki. Izračun** $5^b=\frac{5}{2}$**: 2 točki.**

Če tekmovalec pravilno reši le (b) z ustreznim izračunom $b=\log_5\frac{5}{2}$ **in sklepom** $5^b=\frac{5}{2}$**: 3 + 2 točki.**

III/2. Najprej opazimo, da sta števili $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$ in $a_0'+3a_1'+3^2a_2'+3^3a_3'+3^4a_4'$, $a_i,a_i'\in\{-1,0,1\}$, enaki natanko tedaj, ko je $a_i=a_i'$ za $i=0,1,2,3,4$.

Če je $a_4=1$, so lahko vrednosti $a_0,\ \ldots,\ a_3$ poljubne (dobimo 3^4 različnih števil). Če je $a_4=-1$, bo ne glede na vrednosti ostalih koeficientov število negativno. Če pa je $a_4=0$, ponovimo podoben razmislek glede na a_3. Vseh možnih števil je torej $3^0+3^1+3^2+3^3+3^4=1+3+9+27+81=121$.

Ugotovitev, da mora biti neničelni koeficient z najvišjim indeksom pozitiven: 2 točki. Izračun števila možnosti za ta primer: 2 točki. Vsota $3^0+3^1+3^2+3^3+3^4=121$**: 3 točke.**

Če tekmovalec pravilno zapiše vseh 121 možnosti: 7 točk. Če tekmovalec (napačno!) sklepa, da je to le nekoliko spremenjen zapis v trojiškem sistemu in je zato 3^5-1 **možnosti: 0 točk. Če tekmovalec (pravilno!) sklepa, da je to le nekoliko spremenjen zapis v trojiškem sistemu in nas zanimajo le tista števila, ki so večja od** $\overline{11111}_{(3)}=121$**, a niso večja od** $\overline{22222}_{(3)}=242$**: 7 točk.**

III/3. Računajmo

$$\begin{aligned}
\sin^8 75^\circ-\cos^8 75^\circ &= (\sin^4 75^\circ-\cos^4 75^\circ)(\sin^4 75^\circ+\cos^4 75^\circ)=\\
&= (\sin^2 75^\circ-\cos^2 75^\circ)(\sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ)\cdot\\
&\quad\cdot((\sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ)^2-2\sin^2 75^\circ\cos^2 75^\circ)=\\
&= -\cos(2\cdot 75^\circ)(1-\tfrac{1}{2}\sin^2(2\cdot 75^\circ))=-\cos 150^\circ(1-\tfrac{1}{2}\sin^2 150^\circ)=\\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\tfrac{1}{8})=\tfrac{7\sqrt{3}}{16}.
\end{aligned}$$

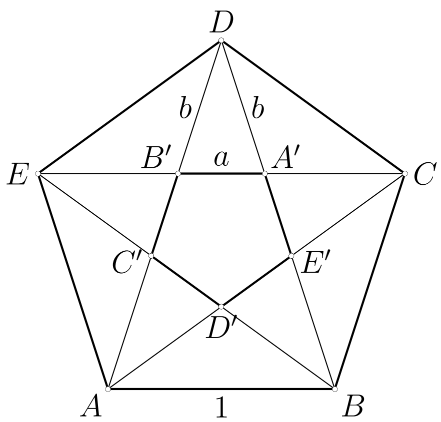
Razcep na razliko 4. potenc: 2 točki. Nadaljnji razcep: 1 točka. Poenostavitev z uporabo zveze $\sin^2 75° + \cos^2 75° = 1$: 1 točka. Izračun: 3 točke.

Če tekmovalec naloge ne reši pravilno, a izraz precej poenostavi: največ 4 točke. Uporaba računala seveda ni dovoljena.

III/4. Vseh možnih vsot $a+b$ po 2 števil iz A je $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$. Zato imata vsaj dve enak ostanek pri deljenju z 20 in ju označimo z $a+b$ in $c+d$. Denimo, da niso vsa števila a, b, c in d med seboj različna. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $a = c$. Potem velja, da 20 deli $b-d$. Ker je $-20 < b-d < 20$, mora biti $b = d$. Slednje pa je v nasprotju z izbiro vsot. Dokazali smo torej, da so vsa števila a, b, c in d med seboj različna. Ker imata števili $a+b$ in $c+d$ enak ostanek pri deljenju z 20, je število $a+b-c-d$ res deljivo z 20.

Opazovanje vsot po 2 števil iz A: 2 točki. Izračun, da je takih vsot 21: 1 točka. Sklep, da imata vsaj 2 vsoti enak ostanek pri deljenju z 20: 1 točka. Dokaz, da so števila v teh 2 vsotah različna: 3 točke.

III/5. Označimo večji petkotnik z $ABCDE$, manjšega pa z $A'B'C'D'E'$, kjer je A' oglišče, ki je najbolj oddaljeno od A. Označimo še $|A'B'| = a$ in $|B'D| = b$. Trikotnika ABD' in ECD sta podobna, saj sta enakokraka s kotoma $36°$ ob osnovnici in kotom $108°$ pri vrhu. Sledi razmerje $\frac{b}{1} = \frac{1}{2b+a}$. Opazimo, da je trikotnik CDB' enakokrak, z vrhom v C, zato je $a+b = 1$. Dobimo kvadratno enačbo $b^2 + b - 1 = 0$, ki ima edino pozitivno rešitev $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in od tod $a = 1 - b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



Podobnost $\triangle ABD' \sim \triangle ECD$: 1 točka.
Zveza $\frac{b}{1} = \frac{1}{2b+a}$: 2 točki. Zveza $a+b=1$: 2 točki.
Enačba $b^2+b-1=0$: 1 točka. Rešitev $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$: 1 točka.
Če tekmovalec vpelje drugačne oznake in zapiše pravilen sistem 2 enačb z 2 neznankama: 5 točk. Če tak sistem poenostavi: 1 točka.

IV/1. Po vrsti izračunamo

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^4}}}} = \frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{x^4}{x^7+1}}} = \frac{1}{x+\frac{x^7+1}{x^2+x^4+x^9}} = \frac{x^2+x^4+x^9}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = a,$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^5}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{x^5}{x^7+1}}} = \frac{1}{1+\frac{x^7+1}{x^3+x^5+x^{10}}} = \frac{x^3+x^5+x^{10}}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = ax \text{ in}$$

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{1}{x^4+\frac{1}{x^3}}}} = \frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{x^3}{x^7+1}}} = \frac{1}{x^2+\frac{x^7+1}{x+x^3+x^8}} = \frac{x+x^3+x^8}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = \frac{a}{x}.$$

Dano enačbo torej lahko zapišemo v obliki $a = xa - \frac{a}{x}$. Ker je $a > 0$ za $x > 0$, lahko enačbo delimo z a in množimo z x. Dobimo kvadratno enačbo $x^2 - x - 1 = 0$, ki ima edino pozitivno rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Poenostavitev vsakega verižnega ulomka: 1 + 1 + 1 = 3 točke. Krajšanje in prevedba na enačbo $x^2 - x - 1 = 0$: 3 točke. Rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: 1 točka.

Če tekmovalec pravilno odpravi vse ulomke in zapiše polinomsko enačbo stopnje 5 ali več, a je ne reši: 3 točke. Če tekmovalec delno razcepi dobljeno enačbo in pravilno zapiše rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a ne dokaže, da je edina: 2 točki.

IV/2. Pri deljenju števila 28 s 3 dobimo ostanek 1, pri deljenju števila 56 s 3 pa ostanek 2. To pomeni, da praštevilo p ne sme imeti niti ostanka 1 niti ostanka 2 pri deljenju s 3, saj bi bilo sicer eno izmed števil $p+28$ oziroma $p+56$ deljivo s 3. Edino praštevilo, ki je deljivo s 3 in ki pride v upoštev, je praštevilo 3, takrat sta $p+28 = 31$ in $p+56 = 59$ res praštevili.

Ugotovitev, da je pomembno opazovati ostanke pri deljenju s 3: 3 točke. Sklep, da je iskano praštevilo enako $p = 3$: 3 točke. Preverjanje, da sta $p + 28$ in $p + 56$ res praštevili: 1 točka.

IV/3. Denimo, da seštevamo n zaporednih celih števil, med katerimi je M največje. Očitno je $M > 0$, saj je vsota enaka naravnemu številu n in torej pozitivna. Velja:

$$\begin{aligned} n &= M + (M-1) + \cdots + (M - (n-1)) \\ n &= n \cdot M - (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ n &= n \cdot M - \frac{(n-1) \cdot n}{2}. \end{aligned}$$

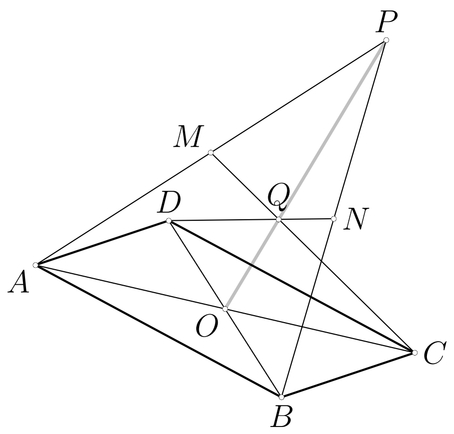
Od tod dobimo $1 = M - \frac{n-1}{2}$, kar pomeni, da mora biti n liho število. Za vsako liho naravno število n je največje celo število v zaporedju enako $M = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Če seštejemo n zaporednih celih števil od vključno $-\frac{n-3}{2}$ do vključno $\frac{n+1}{2}$, je njihova vsota enaka n.

Zapisana vsota n zaporednih števil: 2 točki. Enačba $n = Mn - \frac{n(n-1)}{2}$ ali ekvivalentna: 1 točka. Ugotovitev, da je n liho (potrebni pogoj): 2 točki. Ugotovitev, da taka števila res obstajajo, če je n liho število (zadostni pogoj): 2 točki.

IV/4. Če je med števili a_3, a_5, a_7 in a_9 natanko k števil enakih 1, mora biti med a_2, a_4, a_6, a_8 in a_{10} natanko $k+1$ števil enakih 1. Pri nekem k lahko to napravimo na $\binom{4}{k} \cdot \binom{5}{k+1}$ načinov. Ker je $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, imamo skupaj $1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 126$ možnosti.

Ugotovitev, da mora biti med a_2, a_4, a_6, a_8 in a_{10} natanko $k+1$ števil enakih 1, če je med števili a_3, a_5, a_7 in a_9 natanko k števil enakih 1, ali ekvivalentna: 3 točke. Ugotovitev, da je v posameznem primeru $\binom{4}{k} \cdot \binom{5}{k+1}$ števil: 3 točke. Izračun $1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 126$: 1 točka.

IV/5. 1. način Premice MN, AB in DC so vzporedne, zato sta si trikotnika MQN in CQD podobna. Zaradi podobnosti trikotnikov ABP in MNP je $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|DC|$, pa tudi $|CQ| = 2|MQ|$ in $|DQ| = 2|NQ|$. Ker sta CM in DN težiščnici trikotnikov ACP in DBP, je Q težišče teh 2 trikotnikov. Daljica OP je težiščnica obeh trikotnikov, zato so točke Q, P in O kolinearne. Točka Q leži na $\frac{1}{3}$ daljice od O do P, njena lega je torej neodvisna od izbire paralelograma $ABCD$.



Opomba: pogoj, da točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD, nam zagotavlja, da premici MC in ND nista vzporedni.

2. način Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ in naj bo $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$. Tedaj je $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(1+\lambda)\vec{a}+\frac{1}{2}\mu\vec{b}$ in $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\lambda\vec{a} + \frac{1}{2}(1+\mu)\vec{b}$. Izrazimo $\overrightarrow{OQ}$ na 2 načina: $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{ON} + (1-s)\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OC}$. Sledi $\frac{1}{2}s\lambda\vec{a} + \frac{1}{2}s(1+\mu)\vec{b} - (1-s)\vec{b} = \frac{1}{2}t(1+\lambda)\vec{a} + \frac{1}{2}t\mu\vec{b} - (1-t)\vec{a}$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna, zato je $\frac{1}{2}s\lambda = \frac{1}{2}t(1+\lambda) - (1-t)$ in $\frac{1}{2}s(1+\mu) - (1-s) = \frac{1}{2}t\mu$. Iz prve enačbe dobimo $\lambda(s-t) = 3t-2$, iz druge pa $\mu(s-t) = 2-3s$. Enačbi seštejemo in dobimo $(\lambda+\mu+3)(s-t) = 0$, torej je $s = t$ (ker točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD, je $\lambda + \mu \neq -3$). Iz prve enačbe je $t = \frac{2}{3}$, iz druge pa $s = \frac{2}{3}$. Vstavimo s v $\overrightarrow{OQ}$ in dobimo $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$.

Podobnost $\triangle MQN \sim \triangle CQD$: 2 točki. Ugotovitev, da sta CM in DN težiščnici: 2 točki. Ugotovitev, da je Q težišče: 1 točka. Ugotovitev, da so O, P in Q kolinearne: 1 točka. Sklep $|OQ| = \frac{1}{3}|OP|$ ali ekvivalentna trditev, iz katere je razvidno, da je lega točke Q odvisna le od O in P: 1 točka.

Uvedba 2 linearno neodvisnih vektorjev (ne nujno $\vec{a}$ in $\vec{b}$) in zapis vektorja $\overrightarrow{OP}$ v tej bazi: 1 točka. Izračun krajevnih vektorjev točk M in N: 1 točka. Izračun krajevnega vektorja točke Q na 2 načina in zapisana ustrezna enačba: $1+1=2$ točki. Popolnitev dokaza: 3 točke.