Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 19. april 2008

Naloge za 1. letnik

1. Janez je porabil $\frac{3}{5}$ denarja, ki ga je imel, nato še $\frac{5}{9}$ ostanka ter še $\frac{3}{8}$ novega ostanka. Ostalo mu je 80 evrov. Koliko denarja je imel na začetku?

2. Poenostavi izraz $x^{(x+1)^2} \cdot \left(x^{x-1}\right)^{x+1} : \frac{x^{x^2}}{x^{-2x}}$ in nato izračunaj vrednost izraza za $x = \sqrt{2}$.

3. Sedem delavcev naredi zaključni omet na hiši pri 8 urnem delavniku v 15 delovnih dneh. Koliko delavcev potrebujemo, če bi morala hiša imeti zaključni omet končan v sedmih delovnih dneh in ob tem delavnik podaljšan na 12 ur?

4. Od poljubno izbranega trimestnega števila odštejemo število, ki ima števke v obratnem vrstnem redu. Pokaži, da je razlika vedno deljiva z 11.

5. Za katero vrednost realnega števila a je $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{a}}} = 0$?

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

Naloge za 2. letnik

1. Dana je družina linearnih funkcij: $f(x) = mx + rx - 2m + r + 1$. Poišči vrednosti parametrov m in r tako, da bo graf izbrane linearne funkcije vzporeden premici $y = -x$ in bo potekal skozi točko $T(0, 3)$.

2. Ploščina trikotnika ABC z oglišči $A(-1, -6)$, $B(1, 0)$, $C(3, -3)$ je 9. Izračunaj dolžino težiščnice na stranico b in razdaljo med nožiščem višine na stranico b in razpoloviščem stranice b.

3. Razpolovišče stranice CD kvadrata $ABCD$ je označeno z E. Na daljico AE narišemo pravokotnico skozi oglišče B. Ta pravokotnica seka daljico AE v točki F. Dokaži, da so dolžine stranic trikotnika BEF v razmerju $3 : 4 : 5$. Narišite skico.

4. Marko je postavil kola navpično na vodoravna tla tako, da je eden segal 1 m v višino, drugi pa 2 m v višino. Od vrha vsakega kola do točke, kjer je bil drugi kol zabit v vodoravna tla, je napel vrv. Na kateri višini od tal sta se vrvi križali?

5. Izrazi $(A - B)^{-1}$ z x, če je $A = \dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}}$ in $B = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}$.
   Izraz poenostavi.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

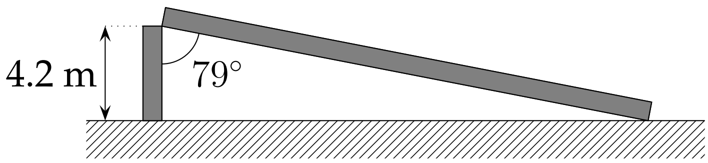
Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 19. april 2008

Naloge za 3. letnik

1. Dolžini osnovnic enakokrakega trapeza sta v razmerju $7 : 3$, krak pa je za 2 cm daljši od višine. Izračunaj ploščino trapeza, če je daljša osnovnica dolga 21 cm. Nariši skico.

2. Drog se je prelomil na višini 4.2 m od tal pod kotom $79°$ (glej sliko).



   Kolikšna je bila višina droga preden se je prelomil? Koliko dm^3 lesa vsebuje spodnji del droga do preloma, če je premer droga enak 60 cm?

3. Rešitvi enačbe $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$ sta dolžini katet pravokotnega trikotnika. Izračunaj polmer kroga, ki je temu trikotniku očrtan.

4. Dana je funkcija $f(x) = a + bc^x$. Določi realna števila a, b, c, če je $f(0) = 5$, $f(1) = 14$ in $f(2) = 50$.

5. S tanko palico neznane dolžine želimo ugotoviti prav tako neznani širino in višino vrat. Če položimo palico vodoravno ob vratih, je ta za 2 laketa daljša od širine vrat. Če palico postavimo navpično, je za 1 laket daljša od višine vrat. Palica se natanko prilega odprtini vrat, če jo postavimo diagonalno med vrata. Izračunaj širino in višino vrat ter dolžino palice.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 19. april 2008

Naloge za 4. letnik

1. V nekem podjetju je zaposlenih 150 ljudi. Direktor prejema mesečno plačo 12000 evrov, trije ožji sodelavci 5000 evrov, 12 najslabše plačanih delavcev dobi 500 evrov, preostali delavci zaslužijo bodisi 1500 bodisi polovico tega zneska. Koliko zaposlenih zasluži mesečno 1500 evrov in koliko polovico manj, če je povprečna mesečna plača 1010 evrov?

2. V produktu potenc $5^{-2} \cdot 5^{-4} \cdot 5^{-8} \cdot \ldots \cdot 5^{-x}$, kjer eksponenti tvorijo geometrijsko zaporedje, določi x tako, da bo $5^{-2} \cdot 5^{-4} \cdot 5^{-8} \cdot \ldots \cdot 5^{-x} = 5^{-16382}$.

3. Med funkcijami $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 8}{(x+c)^2}$ izberi tisto, ki ima definicijsko območje
   $\mathrm{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, ničlo 2 in asimptoto $y = 0$.

4. Izračunaj $\sin 2x$, če je $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$.

5. Vsota prvih petih členov aritmetičnega zaporedja je enaka 50, razlika med petim in drugim členom pa je 9. Izračunaj, kateri člen je sedemkrat tolikšen kot prvi.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

8. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 19. april 2008

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Naj bo x prvotni znesek. Izračunamo delež denarja, ki ga ima Janez po prvem izdatku, to je $\frac{2}{5}x$. Nato izračunamo nov delež denarja, ki ga ima Janez po drugem izdatku, to je $\frac{8}{45}x$. Po tretjem izdatku ima Janez še $\frac{1}{9}x$ denarja. Nastavimo enačbo $\frac{1}{9}x = 80$. Izračunamo iskani znasek 720 evrov.

   Nastavitev prve enačbe in poenostavitev $x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ .... 1 točka
   Nastavitev druge enačbe in poenostavitev $\frac{2}{5}x - \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{8}{45}x$ .... 1 točka
   Nastavitev tretje enačbe in poenostavitev $\frac{8}{45}x - \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{45}x = \frac{1}{9}x$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $\frac{1}{9}x = 80$ .... 1 točka
   Rešitev $x = 720$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

2. V izrazu $x^{(x+1)^2} = x^{x^2+2x+1}$ uporabimo kvadriranje dvočlenika v eksponentu. V potenci $(x^{x-1})^{x+1}$ uporabimo pravilo za potenciranje potenc, tako dobimo $(x^{x-1})^{x+1} = x^{x^2-1}$. Ulomek odpravimo z upoštevanjem pravila za deljenje potenc. Upoštevamo pravila za računanje s potencami in izraz skrčimo do x^{x^2}. Vstavimo $\sqrt{2}$ in izračunamo vrednost izraza.

   Zapis $x^{(x+1)^2} = x^{x^2+2x+1}$ .... 1 točka
   Zapis $(x^{x-1})^{x+1} = x^{x^2-1}$ .... 1 točka
   Odprava deljenja z ulomkom $x^{-x^2} \cdot x^{-2x}$ .... 1 točka
   Rezultat x^{x^2} .... $1^* + 1$ točka
   Izračunana vrednost 2 .... 1 točka

3. Nastavimo sklepni račun in ugotovimo, da gre za obratno sorazmerje. Zapišemo enačbo $7 \cdot 8 \cdot 15 = x \cdot 12 \cdot 7$ in jo rešimo.

   Zapis sklepnega računa:
   7 . . . 8ur. . . 15dni
   x . . . 12ur. . . 7 dni. . . . . $1 + 1$ točka
   Zapis enačbe $7 \cdot 8 \cdot 15 = x \cdot 12 \cdot 7$ . . . . 1 točka
   Zapis $x = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{12 \cdot 7}$ . . . . 1 točka
   Izračun $x = 10$ . . . . 1 točka
   Zapisan odgovor . . . . 1 točka
   OPOMBA: Če tekmovalec zapiše enačbo brez sklepnega računa dobi vse točke. Če zapiše samo rešitev, dobi 2 točki.

4. Obe števili zapišemo z desetiškim mestnim zapisom in ju odštejemo. Izpostavimo skupni faktor in iz razstavljene oblike ugotovimo, da je izraz deljiv z 11.

   Zapis prvega števila $100a + 10b + c$ . . . . 1 točka
   Zapis drugega števila $100c + 10b + a$ . . . . 1 točka
   Izračunana razlika števil $99a - 99c$ . . . . 1 točka
   Izpostavljen skupni faktor $99(a - c)$ . . . . 1 točka
   Ugotovitev, da $11|99$ . . . . 1 točka
   Ugotovitev, da 11 deli celoten izraz . . . . 1 točka

5. Poenostavimo verižni ulomek do oblike $\frac{10a+3}{7a+2}$. Ta je enak nič, če je števec enak 0. Tako je $10a + 3 = 0$ oziroma $a = -\frac{3}{10}$.

   Poenostavitev izraza $\frac{1}{3+\frac{1}{a}} = \frac{a}{3a+1}$ . . . . 1 točka
   Poenostavitev izraza $2 + \frac{a}{3a+1} = \frac{7a+2}{3a+1}$ . . . . 1 točka
   Odprava dvojnega ulomka $1 + \frac{3a+1}{7a+2}$ . . . . 1 točka
   Izračun vsote $\frac{10a+3}{7a+2}$ . . . . 1 točka
   Zapis enačbe $10a + 3 = 0$ . . . . 1 točka
   Izračunana reštev $a = -\frac{3}{10}$ . . . . 1 točka

Drugi letnik

1. Odčitamo smerni koeficient družine premic $f(x)$. Ker sta premici vzporedni, enačimo smerna koeficienta družine premic in simetrale sodih kvadrantov $m + r = -1$. Točka T je presečišče premice z ordinatno osjo, zato iz družine funkcij $f(x)$ odčitamo začetno vrednost. Zapišemo enačbo $-2m + r + 1 = 3$. Rešimo dobljeni sistem. Rešitvi sta $m = -1$ in $r = 0$.

   Odčitan smerni koeficient $m + r$ . . . . 1 točka
   Zapis enačbe $m + r = -1$ . . . . 1 točka
   Zapis enačbe $-2m + r + 1 = 3$ . . . . 1 točka
   Reševanje sistema . . . . 1^* točka
   Izračunani vrednosti $m = -1$ in $r = 0$ . . . . 2 točki

2. Izračunamo koordinati razpolovišča stranice AC, ki je $R(\frac{-1+3}{2}, \frac{-3-6}{2})$. Izračunamo $t_b = d(B,R) = \frac{9}{2}$. Izračunamo dolžino stranice $b = d(A,C) = 5$. Uporabimo obrazec $S = \frac{b \cdot v_b}{2}$ in dobimo $v_b = \frac{18}{5}$. Upoštevamo zvezo $t_b^2 = v_b^2 + x^2$, pri čemer je x iskana razdalja. Ta meri $x = \frac{27}{10}$.

   Izračunani koordinati razpolovišča $R(1, -\frac{9}{2})$ .... 1 točka
   Izračunana dolžina $t_b = \frac{9}{2}$ .... 1 točka
   Uporaba obrazca $S = \frac{b \cdot v_b}{2}$ .... 1 točka
   Izračunana dolžina $b = 5$ .... 1 točka
   Izračunana $v_b = \frac{18}{5}$ .... 1 točka
   Izračunana iskana razdalja $x = \frac{27}{10}$ .... 1 točka

3. Ugotovimo, da je trikotnik AED podoben trikotniku BAF. Iz podobnosti izračunamo dolžino stranice $|BF| = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Nato s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo dolžino stranice $|EF| = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Zapišemo še razmerje dolžin stranic $|EB| : |BF| : |EF| = 5 : 4 : 3$.

   Narisana skica .... 1 točka
   Izračunana stranica $|EB| = |AE| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .... 1 točka
   Ugotovljena podobnost $\triangle AED \approx \triangle BAF$ .... 1 točka
   S podobnostjo izračunana $|BF| = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .... 1 točka
   S Pitagorovim izrekom izračunana $|EF| = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$ .... 1 točka
   Zapisano razmerje dolžin stranic $|EB| : |BF| : |EF| = 5 : 4 : 3$ .... 1 točka

4. Ob narisani skici ugotovimo podobnost trikotnikov. Zapišemo razmerji, npr: $h : 2 = y : x$ in $h : 1 = (x-y) : x$. Izračunamo $h = \frac{2}{3}$ m, kar je višina, na kateri se sekata vrvici.

   $h=$ iskana višina,
   $y=$ vodoravna razdalja med nižjim kolom in nožiščem h-ja,
   $x=$ vodoravna razdalja med koloma,
   $(x-y) =$ vodoravna razdalja med višjim kolom in nožiščem h-ja
   Ugotovitev parov podobnih trikotnikov .... 1 točka
   Zapis sorazmerja $h : 2 = y : x$ .... 1 točka
   Zapis sorazmerja $h : 1 = (x-y) : x$ .... 1 točka

   Izračun $h = \frac{2}{3}$ m .... $1^* + 1$ točka

   Odgovor: Vrvici se sekata $\frac{2}{3}$ m nad tlemi .... 1 točka

5. Poenostavimo izraz A, tako da ulomek razširimo z $x^{\frac{1}{3}}$. Dobimo $A = \frac{3}{x-2}$. Izraz B pa razširimo z $x^{-\frac{1}{3}}$. Dobimo $B = \frac{1}{x-1}$. Izračunamo razliko $A - B = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$. Zapišemo še $(A-B)^{-1} = \frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}$.

   Poenostavitev izraza A do oblike $A = \frac{3}{x-2}$ .... $1^* + 1$ točka
   Poenostavitev izraza B do oblike $B = \frac{1}{x-1}$ .... $1^* + 1$ točka
   Izračunana razlika $A - B = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$ .... 1 točka

Rezultat $(A-B)^{-1} = \frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}$ .... 1 točka

Tretji letnik

1. Iz razmerja dolžin osnovnic $7:3=21:x$ dobimo dolžino krajše osnovnice, ki meri 9 cm. Za izračun višine uporabimo Pitagorov izrek $v^2 = b^2-(\frac{a-c}{2})^2$. Upoštevamo, da je $b=v+2$, vstavimo v Pitagorov izrek in izračunamo dolžino višine, ki je 8 cm. Ploščina trapeza je 120 cm^2.

   Zapis sorazmerja $7:3=21:x$ .... 1 točka
   Ustrezna skica .... 1 točka
   Izračunana dolžina stranice $c=9$ cm .... 1 točka
   Zapis Pitagorovega izreka $(v+2)^2 = v^2+6$ .... 1 točka
   Rešitev $v=8$ cm .... 1 točka
   Izračunana ploščina 120 cm^2 .... 1 točka

2. Uporabimo kotno funkcijo $\cos 79^\circ = \frac{4{,}2}{y}$ in izračunamo dolžino odlomljenega dela droga $y=22$ m. Izračunamo višino droga pred prelomom, ki je $v=4,2+22=26,2$ m. Ugotovimo, da je polmer droga $r=3$ dm. Izračunamo prostornino dela droga, ki je $V=\pi\cdot 9\cdot 42 = 1187,5$ dm^3.

   Ustrezna skica .... 1 točka
   Uporaba kotne funkcije $\cos 79^\circ = \frac{4{,}2}{y}$ .... 1 točka
   Izračun dolžine odlomljenega dela droga $y=22m$ .... 1 točka
   Izračun višine droga $v=4,2+22=26,2$ m. .... 1 točka
   Ugotovitev, da je polmer $r=3$ dm .... 1 točka
   Izračunana prostornina $V=1187,5$ dm^3 .... 1 točka

3. Enačbo množimo z $\log(5-x)$, antilogaritmiramo in uredimo v kvadratno $15x^2-75x+90=0$. Rešitvi kvadratne enačbe sta $x_1=2,\ x_2=3$. Rešitvi enačbe sta dolžini katet pravokotnega trikotnika. Izračunamo dolžino hipotenuze. Polovična vrednost dolžine hipotenuze je enaka polmeru R temu trikotniku očrtanega kroga.

   Ureditev enačbe po antilogaritmiranju $\log(35-x^3) = 3\log(5-x)$ .... 1 točka
   Kubiranje v enačbi $35-x^3 = 125-75x+15x^2-x^3$ .... 1 točka
   Rešitev kvadratne enačbe $x_1=2, x_2=3$ .... $1^* + 1$ točka
   Izračunana dolžina hipotenuze $c=\sqrt{13}$ .... 1 točka
   Izračun polmera $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$ .... 1 točka

4. Vstavimo dane podatke $f(0)=5, f(1)=14$ in $f(2)=50$ v predpis funkcije $f(x)$. Dobimo sistem enačb $5=a+b,\ 14=a+bc,\ 50=a+bc^2$. Uporabimo zamenjalni način reševanja in dobimo rešitvi za c: $c_1=4$ in $c_2=1$. Rešitev c_2 odpade zaradi nedefiniranosti ulomka $\frac{9}{c-1}$. Izračunamo preostale vrednosti $a=2,\ b=3$ ter zapišemo predpis funkcije $f(x)=2+3\cdot 4^x$.

   Zapis sistema iz danih podatkov $5=a+b, 14=a+bc, 50=a+bc^2$ .... 1 točka

Izračunana neznanka $b = \frac{9}{c-1} = \frac{45}{c^2-1}$ ali $a = \frac{15-15c}{1-c} = \frac{50-5^2}{1-c^2}$ ....1 točka
Zapis kvadratne enačbe $c^2 - 5c + 4$ ....1 točka
Rešitev kvadratne enačbe $c_1 = 4$ in $c_2 = 1$ ....1 točka
Izračunani vrednosti $a = 2, b = 3$ ....1 točka
Zapis funkcije $f(x) = 2 + 3 \cdot 4^x$ ....1 točka

5. Označimo dolžino palice z d, širino vrat z x in višino vrat z y. Veljajo zveze $x = d - 2$, $y = d - 1$ in $x^2 + y^2 = d^2$. Reševanje sistema treh enačb s tremi naznankami privede do enačbe $d^2 - 6d + 5 = 0$ in rešitev $d_1 = 1$ in $d_2 = 5$. Rešitev $d = 1$ ne ustreza. Iz $d = 5$ pa sledita še rešitvi $x = 3$ in $y = 4$.

   x= širina vrat
   y= višina vrat
   d=dolžina palice
   Zapis posameznih zvez:
   $d = x + 2$ ....1 točka
   $d = y + 1$ ....1 točka
   $d^2 = x^2 + y^2$ ....1 točka
   Urejena enačba $d^2 - 6d + 5 = 0$ ....1 točka
   Rešitvi $d_1 = 1$ in $d_2 = 5$ ....1 točka
   Odgovor; Širina vrat $x = 3$, višina vrat $y = 4$, dolžina palice $d = 5$ lahtov. ....1 točka

Četrti letnik

1. Naj bo x število zaposlenih, ki zaslužijo 1500 in y število zaposlenih, ki zaslužijo 750 evrov. apišemo enačbi $1 + 3 + 12 + x + y = 1500$ in $\frac{12000+3\cdot5000+12\cdot500+x\cdot1500+y\cdot750}{150} = 1010$. Enačbi uredimo in dobimo sistem $x + y = 134, 2x + y = 158$. Sistem rešimo in dobimo rešitvi $x = 24, y = 110$. Zapišemo odgovor: 24 delavcev zasluži 1500 evrov, polovico manj pa 110 delavcev.

   x število zaposlenih, ki zaslužijo 1500
   y število zaposlenih, ki zaslužijo 750 evrov.
   Zapis enačbe $1 + 3 + 12 + x + y = 1500$ ....1 točka
   Zapis enačbe $\frac{12000+3\cdot5000+12\cdot500+x\cdot1500+y\cdot750}{150} = 1010$ ....1 točka
   Reševanje sistema $x + y = 134, 2x + y = 158$ ....1* točka
   Rešitev $x = 24$ ....1 točka
   Rešitev $y = 110$ ....1 točka
   Zapisan odgovor ....1 točka

2. Zapišemo vsoto členov geometrijskega zaporedja $-2 + (-4) + (-8) + \ldots + (-x) = -16382$, od koder odčitamo prvi člen, količnik in $x = a_n$. Uporabimo obrazec za vsoto prvih členov geometrijskega zaporedja $s_n = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$. Vstavimo podatke in izračunamo, da je $n = 13$. Uporabimo zvezo, da je $-x = a_{13} = a_1 \cdot k^{12} = -8192$.

   Sklep $n = -2 - 4 - 8 - \ldots - x = -16382$ ....1 točka

Izračun količnika $k = 2$ in določitev prvega člena $a_1 = -2$, ugotovitev $x = a_n$ in $s_n = -16382$ $1 + 1$ točka
Uporaba obrazca za vsoto $-16382 = -2 \cdot \frac{2^n-1}{2-1}$ .... 1 točka
Rešitev $n = 13$ .... 1 točka
Izračun $x = 8192$ .... 1 točka

3. Iz definicijskega območja razberemo, da je pol $x = 1$, zato zapišemo enačbo $(1 + c)^2 = 0$. Izračunamo $c = -1$. Iz enačbe asimptote razberemo, da je stopnja števca manjša od stopnje imanovalca, zato je $a = 0$. Upoštevamo, da je število 2 ničla unkcije: $a \cdot 0 + 2b + 8 = 0$, od koder izračunamo $b = -4$. Funkcija je $f(x) = \frac{-4x+8}{(x+1)^2}$.

   Uporaba pola $x = 1$ v $(1 + c)^2 = 0$ .... 1 točka
   Izračun $c = -1$ .... 1 točka
   Uporaba asimptote .... 1 točka
   Zapis enačbe $2b + 8 = 0$ .... 1 točka
   Izračun $b = -4$ .... 1 točka
   Zapisan predpis funkcije $f(x) = \frac{-4x+8}{(x+1)^2}$ .... 1 točka

4. Zapišemo zvezo za $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ in $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$, kamor vstavimo $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. Dobimo enačbo $(\frac{1}{2})^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$. Izračunamo $2 \sin x \cos x = \frac{3}{4} = \sin 2x$.

   Zapis $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ .... 1 točka
   Kvadriranje $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$ .... 1 točka
   Uporaba $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $(\frac{1}{2})^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$ .... 1 točka
   Izračun $2 \sin x \cos x = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ .... 1 točka
   Zapisana rešitev $\sin 2x = \frac{3}{4}$ .... 1 točka

5. Uporabimo obrazec za vsoto prvih petih členov aritmetičnega zaporedja $s_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$. Upoštevamo, da je $a_5 - a_2 = 9$ oziroma $a_1 + 4d - a_1 - d = 9$. Izračunamo diferenco $d = 3$. Diferenco vstavimo v obrazec za vsoto $\frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 50$ in izračunamo $a_1 = 4$. Zapišemo zvezo $a_n = 7a_1 = 28$. Uporabimo znane podatke in izračunamo, da je deveti člen sedemkrat tolikšen kot prvi.

   Zapis enačbe $\frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 50$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $a_1 + 4d - a_1 - d = 9$. .... 1 točka
   Izračun $d = 3$ .... 1 točka
   Izračun $a_1 = 4$ .... 1 točka
   Zapis zveze $28 = 4 + (n - 1) \cdot 3$ .... 1 točka
   Izračun $n = 9$ .... 1 točka