Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA 1. LETNIK

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut.

1. Kaja in Matic sta lovila ribe. Vsaka riba, ki jo je ulovila Kaja, je tehtala 144 g. Matic pa je ulovil ribe, ki so tehtale vsaka po 168 g. Na koncu dneva sta ugotovila, da je skupna masa njunega ulova rib enaka. Najmanj koliko rib je ulovil vsak? Kolikšna je bila v tem primeru skupna masa Kajinega in Matičevega ulova?

   (6 točk)

2. Reši enačbo $\left(1-(1+x^{-2})^{-1}\right)^{-1}=3{,}25$.

   (6 točk)

3. Zapiši vsa naravna števila x, za katera je vrednost izraza $6\,(x-1)-2(3x+2(x-1))$ večja od vrednosti izraza $5(x+1)-3x-57$.

   (7 točk)

4. V trgovino so pripeljali 475 kg sadja: jabolka, mandarine in banane. Koliko kg tehta posamezna vrsta sadja, če polovica jabolk tehta dvakrat toliko kot tehta $30\,\%$ mandarin, banan pa je za 35 kg manj kot jabolk?

   (7 točk)

5. Koliko odstotkov od $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ je $\frac{1}{12}\cdot\frac{\left(0{,}5-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 8}{0{,}008\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)^4}$? Rezultat zaokroži na stotine. Nalogo reši brez uporabe žepnega računala.

   (8 točk)

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA 2. LETNIK

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut.

1. Za dani vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ izračunaj natančno vrednost izraza

$$\sqrt[4]{a^{-1}b^3 \cdot \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6a^4b^{-2}}{\sqrt{2}}}.$$

(6 točk)

2. Določi parameter a tako, da se bosta premici z enačbama $(a-1)x + ay - 5 = 0$ in $ax + (3a-1)y - 7 = 0$ sekali na abscisni osi. Zapiši koordinati presečišča premic.

(6 točk)

3. V trikotniku ABC je kot α velik $30°$, stranica a je dolga 4 cm, stranica c je dolga dvakrat toliko kot težiščnica na stranico c. Natančno izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC. Nariši skico.

(7 točk)

4. Natančno izračunaj dolžini stranic pravokotnika, katerega obseg je 4 cm, kot med diagonalama pa $60°$.

(7 točk)

5. Dana je premica z enačbo $2x - 3y + 15 = 0$ in točka $T(3, y)$ na njej. Izračunaj x, tako da bo razdalja med točkama $A(x, 4)$ in T enaka $3\sqrt{5}$.

(8 točk)

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA 3. LETNIK

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut.

1. Obrtnik izdeluje pločevinke v obliki valja. Vsaka pločevinka ima premer 6 cm in prostornino $600\ \mathrm{cm}^3$. Obrtnik se odloči spremeniti premer pločevink, tako da bodo imele prostornino $700\ \mathrm{cm}^3$ in enako višino kot prej. Koliko cm^2 pločevine porabi za izdelavo spremenjene pločevinke?

(6 točk)

2. Grafično reši enačbo $\log_2(x-1)+1=-\frac{3}{2}x+4$. Rešitev računsko preveri.

(6 točk)

3. V računalniškem omrežju se širi računalniški virus. Število okuženih računalnikov določimo s predpisom $N(t)=30\cdot e^{0,1t}$, kjer je N število okuženih računalnikov in t čas v minutah.

   a) Največ koliko računalnikov je okuženih v eni uri?

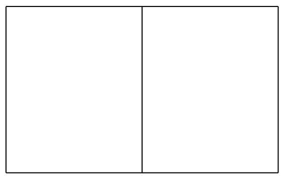
   b) Najmanj koliko minut je potrebnih, da virus okuži $60\,000$ računalnikov?

(7 točk)

4. Izračunaj parameter a tako, da bosta imeli parabola z enačbo $y=(a-1)x^2+ax-1$ in premica z enačbo $y=x-2$ le eno skupno točko. Zapiši koordinati te točke.

(7 točk)

5. Janja se je odločila za ekološko vzrejo kokoši in gosk. Ograditi namerava parcelo v obliki pravokotnika s ploščino $1632\ \mathrm{m}^2$. Goske in kokoši bo imela ločene, tako da bo parcelo po širini pregradila na pol (glej sliko). Za ograditev bo skupno potrebovala 198 m ograde. Kolikšna je širina in kolikšna dolžina parcele?



(8 točk)

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA 4. LETNIK

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut.

1. Tilen je metal igralno kocko. V tabeli je predstavil število metov za posmezne pike.

število pik	1	2	3	4	5	6
število metov	$3(x-2)$	$2x$	$2(x-1)$	$x+2$	$2x+1$	x

   a) Kolikokrat je vrgel posamezno število pik, če število šestic predstavlja natanko $10\,\%$ vseh metov?

   b) Izračunaj povprečno število padlih pik.

   c) Nariši frekvenčni kolač.

(6 točk)

2. Poenostavi izraz $\frac{2\cos^2 x}{\sin x - \sin^{-1} x} - \sin x$. Za katere vrednosti x izraz nima pomena?

(6 točk)

3. Nariši graf funkcije f s predpisom $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}(2x+3)^{-1}$. Katera premica (zapiši njeno enačbo) ne seka grafa funkcije f in je vzporedna osi x?

(7 točk)

4. V prvi vrsti dvorane je 15 sedežev, v vsaki naslednji vrsti so trije sedeži več.

   a) V dvorani je 870 sedežev. Koliko vrst ima ta dvorana in koliko sedežev je v njeni zadnji vrsti?

   b) Vstopnica za predstavo stane 9 evrov za otroke in 12 evrov za odrasle. Na dopoldanski predstavi je bila dvorana polno zasedena z otroki. Najmanj koliko odraslih bi moralo zasesti dvorano na popoldanski predstavi, da bi imel lastnik dvorane popoldne večji zaslužek kot dopoldne?

(7 točk)

5. Dan je polinom p s predpisom $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 7$. Določi števili a in b tako, da bo premica z enačbo $y = 2x + 7$ sekala graf polinoma p v točkah z abscisama 1 in -4.

(8 točk)

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2012

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilen postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Prvi letnik

1. Ugotovimo, da je skupna masa Kajinih oziroma Matičevih rib enaka najmanjšemu skupnemu večkratniku števil 144 in 168. Števili razcepimo na prafaktorje, zmnožimo ustrezne faktorje in dobimo maso rib 1008 g. Da dobimo število Kajinih rib, delimo 1008 g s 144 g. Število Matičevih rib pa dobimo tako, da 1008 g delimo s 168 g. Kaja je torej ulovila 7 rib, Matic pa 6 rib. Izračunamo še skupno maso ulovljenih rib, ki je $2 \cdot 1008$ g$= 2016$ g.

   Ugotovitev, da je masa rib najmanjši skupni večkratnik števil 144 in 168 .... 1 točka
   Razcep na prafaktorje $144 = 2^4 \cdot 3^2$ in $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ .... 1 točka
   Določitev najmanjšega skupnega večkratnika $v(144, 168) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$ ..... 1 točka
   Izračun števila Kajinih rib .... 1 točka
   Izračun števila Matičevih rib .... 1 točka
   Izračun skupne mase rib $2 \cdot 1008$ g$= 2016$ g .... 1 točka

2. Uredimo notranji oklepaj $\left(1-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right)^{-1}=3{,}25$, razširimo na skupni imenovalec $\left(1-\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{-1}\right)^{-1}=3{,}25$. Upoštevamo negativni eksponent $\left(1-\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{-1}=3{,}25$ in znova razširimo na skupni imenovalec $\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}\right)^{-1}=3{,}25$. Znova upoštevamo negativni eksponent $\frac{x^2+1}{1}=3{,}25$, uredimo $x^2=2{,}25$ in korenimo. Izračunamo rešitvi $x_1=1{,}5$ in $x_2=-1{,}5$.

Upoštevanje negativnega eksponenta $1+\frac{1}{x^2}$ . . . . 1 točka
Razširitev na skupni imenovalec $\frac{x^2+1}{x^2}$ . . . . 1 točka
Upoštevanje negativnega eksponenta $1-\frac{x^2}{x^2+1}$ . . . . 1 točka
Razširitev na skupni imenovalec $\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}$ . . . . 1 točka
Ureditev enačbe $x^2=2{,}25$ . . . . 1 točka
Izračunani rešitvi $x_1=1{,}5$ in $x_2=-1{,}5$ . . . . 1 točka

3. Zapišemo neenačbo $6\,(x-1)-2(3x+2(x-1))>5(x+1)-3x-57$. Odpravimo oklepaje na levi in desni strani neenačbe. Dobimo $6x-6-10x+4>2x-52$. Izračunamo $-6x>-50$ oziroma $x<\frac{25}{3}$. Za naravna števila $1,2,3,4,5,6,7$ in 8 je vrednost prvega izraza večja od vrednosti drugega izraza.

Zapis neenačbe $6\,(x-1)-2(3x+2(x-1))>5(x+1)-3x-57$ . . . . 1 točka
Ureditev neenačbe na levi in desni strani $6x-6-10x+4>2x-52$ . . . . 1^*+1^* točka
Poenostavitev neenačbe $-6x>-50$ . . . . 1 točka
Deljenje neenačbe z negativnim številom . . . . 1 točka
Izračun $x<8\frac{1}{3}$ . . . . 1 točka
Zapis naravnih števil: $1,2,3,4,5,6,7$ in 8 . . . . 1 točka

4. Naj bodo neznane količine označene: npr. j pomeni količino jabolk v kg, m pomeni količino mandarin v kg in b pomeni količino banan v kg. Zapišemo zvezo med količinami $j+m+b=475$ in enačbi $\frac{1}{2}j=2\cdot\frac{30}{100}m$ in $b=j-35$. Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami. Rešitev je $j=180$ kg, $m=150$ kg in $b=145$ kg.

Zapis enačbe $j+m+b=475$ . . . . 1 točka
Zapis enačbe $\frac{1}{2}j=2\cdot\frac{30}{100}m$ ali $5j-6m=0$ . . . . 1 točka
Zapis enačbe $b=j-35$ ali $j-b=35$ . . . . 1 točka
Reševanje sistema treh enačb s tremi neznankami . . . . 1^* točka
Rešitev $j=180$ kg, $m=150$ kg in $b=145$ kg. . . . . $1+1+1$ točka
OPOMBA: Če v rezultatu ni enot, odbijemo 1 točko.

5. Poenostavimo prvi izraz $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}-\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{12}}-\frac{2}{3}=\frac{9}{4}-\frac{2}{3}=\frac{19}{12}$. Poenostavimo tudi drugi izraz $\frac{1}{12}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 8}{\frac{1}{125}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{16}\cdot 8}{\frac{1}{125}\cdot\frac{625}{16}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{8}{5}=\frac{2}{15}$. Zapišemo enačbo $\frac{x}{100}\cdot\frac{19}{12}=\frac{2}{15}$. Izračunamo $x=\frac{2\cdot 12}{19\cdot 15}\cdot 100=8{,}42$.

Poenostavljen števec in imenovalec prvega dela prvega izraza do npr. $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{12}}$ . . 1^*+1^* točka
Izračun vrednosti prvega izraza $\frac{19}{12}$ . . . . 1 točka
Poenostavljen drug izraz do npr. $\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{16}\cdot 8}{\frac{1}{125}\cdot\frac{625}{16}}$ . . . . 2^* točki
Izračun vrednosti drugega izraza $\frac{2}{15}$ . . . . 1 točka
Zapis enačbe $\frac{x}{100}\cdot\frac{19}{12}=\frac{2}{15}$ . . . . 1 točka
Rešitev $8{,}42\,\%$ . . . . 1 točka

Drugi letnik

1. I. način:

   Vstavimo vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ v dani izraz. Dobimo $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}\right)^{-1} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{3} \cdot \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2}}{\sqrt{2}}}$. Poenostavimo in dobimo $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt[6]{2}}$. Racionaliziramo imenovalec in zmnožimo korene $\frac{3\sqrt{2}\sqrt[6]{2^5}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{2^8}}{2}$. Delno korenimo $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} = 3\sqrt[3]{2}$.

   Vstavljeni vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ .... 1 točka
   Poenostavljen prvi faktor $\sqrt{2}$ .... 1 točka
   Poenostavljen drugi faktor $\sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{2}}}$ .... 1 točka
   Delno korenjenje drugega faktorja in racionalizacija imenovalca $\frac{3}{\sqrt[6]{2}} = \frac{3\sqrt[6]{2^5}}{2}$ ..... 1* točka
   Množenje korenov $\frac{3\sqrt{2}\sqrt[6]{2^5}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{2^8}}{2}$ .... 1* točka
   Rešitev $3\sqrt[3]{2}$ .... 1 točka

   II. način:

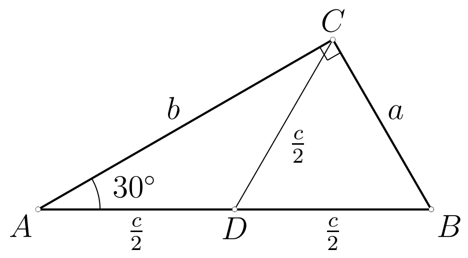
   Poenostavimo prvi faktor $\sqrt[8]{a^{-2}b^6 \cdot 6}$ in drugi faktor $\sqrt[6]{\frac{6^2a^8b^{-4}}{2}}$. Množimo korena in dobimo $\sqrt[24]{\frac{a^{26}b^2 \cdot 6^{11}}{2^4}}$. Vstavimo $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$. Dobimo $\sqrt[24]{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{26} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{2} \cdot 6^{11}}{2^4}} = \sqrt[24]{2^8 \cdot 3^{24}} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$.

   Poenostavljen prvi faktor $\sqrt[8]{a^{-2}b^6 \cdot 6}$ .... 1 točka
   Poenostavljen drugi faktor $\sqrt[6]{\frac{6^2a^8b^{-4}}{2}}$ .... 1 točka
   Množenje korenov $\sqrt[24]{\frac{a^{26}b^2 \cdot 6^{11}}{2^4}}$ .... 1* točka
   Vstavljeni vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ .... 1 točka
   Poenostavitev $\sqrt[24]{2^8 \cdot 3^{24}}$ .... 1 točka
   Rešitev $3\sqrt[3]{2}$ .... 1 točka

2. Upoštevamo, da je ordinata presečišča enaka 0. V enačbi premic vstavimo $y = 0$: $(a-1)x - 5 = 0$ in $ax - 7 = 0$. Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{7}{a}$ in vstavimo v prvo. Dobimo $(a-1)\frac{7}{a} - 5 = 0$, odpravimo ulomek, poenostavimo $7a - 7 - 5a = 0$. Izračunamo $a = \frac{7}{2}$, kar vstavimo v eno izmed enačb premic: npr. $\frac{7}{2}x - 7 = 0$. Izračunamo $x = 2$. Zapišemo koordinati presečišča $P(2, 0)$.

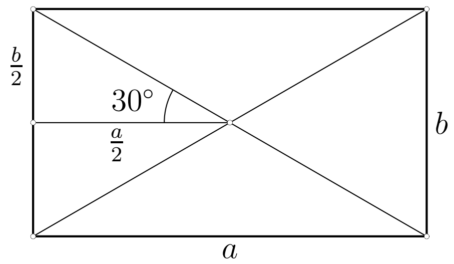
   Zapis ali upoštevanje $y = 0$ .... 1 točka
   Reševanje sistema enačb $(a-1)x - 5 = 0$ in $ax - 7 = 0$ .... 2* točki
   Izračun $a = \frac{7}{2}$ .... 1 točka
   Izračun $x = 2$ .... 1 točka
   Zapis koordinat presečišča $P(2, 0)$ .... 1 točka

3. Točka D naj bo razpolovišče stranice c. Trikotnik CAD je enakokrak, zato velja $\angle ACD = 30^\circ$ in $\angle CDA = 120^\circ$. Torej je $\angle BDC = 60^\circ$. Ker je tudi trikotnik BCD enakokrak, velja $\angle CBD = \angle DCB = 60^\circ$. To pomeni, da je trikotnik ABC pravokoten ($\gamma = 90^\circ$). S pomočjo kotnih funkcij izračunamo dolžini stranic b in c, npr. $\tan 30^\circ = \frac{a}{b}$ in $\sin 30^\circ = \frac{a}{c}$. Izračunamo $b = \frac{a}{\tan 30^\circ} = 4\sqrt{3}$ cm in $c = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 8$ cm.



Ustrezna skica .... 1 točka
Upoštevanje, da sta trikotnika CAD in BCD enakokraka .... 1 točka
Upoštevanje, da je trikotnik ABC pravokotni .... 1 točka
Uporaba zveze $\tan 30° = \frac{a}{b}$ .... 1* točka
Izračun $c = 8$ cm .... 1 točka
Uporaba zveze $\sin 30° = \frac{a}{c}$ .... 1* točka
Izračun $b = 4\sqrt{3}$ cm .... 1 točka
OPOMBA: Če v rezultatu ni enot, odbijemo 1 točko.

4. Narišemo skico in zapišemo zvezi med dolžinami stranic: $\tan 30° = \frac{b}{a}$ in $2a + 2b = 4$. Izrazimo npr. $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ in vstavimo v $2a + 2b = 4$. Dobimo $2a + 2\frac{\sqrt{3}}{3}a = 4$. Izračunamo $a = 3 - \sqrt{3}$ cm in $b = \sqrt{3} - 1$ cm.



Ustrezna skica z označenim kotom med diagonalama .... 1 točka
Zapis zveze $\tan 30° = \frac{b}{a}$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba $2a + 2b = 4$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 2* točki
Izračun $a = 3 - \sqrt{3}$ cm .... 1 točka
Izračun $b = \sqrt{3} - 1$ cm .... 1 točka
OPOMBA: Če v rezultatu ni enot, odbijemo 1 točko.

5. Izračunamo neznano koordinato točke T, tako da vstavimo $x = 3$ v enačbo premice in rešimo enačbo $2 \cdot 3 - 3y + 15 = 0$. Izračunamo $y = 7$. Koordinato x točke A izračunamo z uporabo formule za razdaljo med točkama oziroma Pitagorovega izreka $d(A,T) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Vstavimo podatke $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (4-7)^2 + (x-3)^2$ in poenostavimo $45 = (-3)^2 + (x-3)^2$ oziroma $(x-3)^2 = 36$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $x_1 = 9$ in $x_2 = -3$.

Izračun neznane koordinate točke T .... 1 točka
Zapis enačbe $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (4-7)^2 + (x-3)^2$ .... 1 točka

I. način:

Izračun $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe $(x-3)^2 = 36$ .... 1 točka
Zapis $x - 3 = \pm\sqrt{36}$ .... $1+1$ točka
Izračunani rešitvi $x_1 = 9$ in $x_2 = -3$ .... $1+1$ točka

II. način:

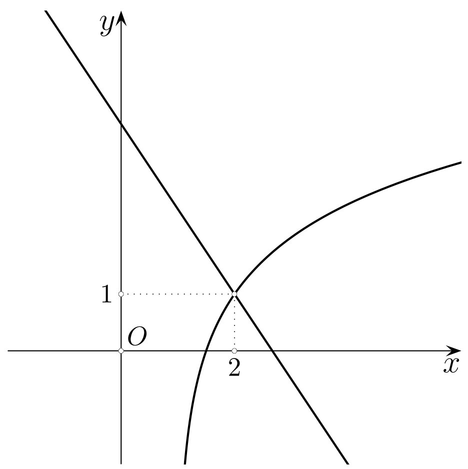
Kvadriranje $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ in $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$ .... $1+1$ točka
Ureditev enačbe $x^2 - 6x - 27 = 0$ .... 1 točka
Uporaba Vietovega pravila $(x-9)(x+3) = 0$ .... 1 točka
Izračunani rešitvi $x_1 = 9$ in $x_2 = -3$ .... $1+1$ točka

Tretji letnik

1. Obe pločevinki imata enako višino. Iz formule za prostornino valja $V = \pi r^2 \cdot v$ izrazimo višino $v = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$. Enačimo višini obeh valjev in iz zveze $\frac{V_1}{\pi r_1^2} = \frac{V_2}{\pi r_2^2}$ izračunamo polmer druge pločevinke $r_2 \doteq 3{,}24$ cm. Izračunamo površino spremenjene pločevinke, ki je $P = 2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 \cdot v \doteq 2\pi \cdot 3{,}24 + 2\pi \cdot 3{,}24 \cdot 21{,}22 \doteq 498$.

   Zapis ali uporaba obrazca za prostornino $V = \pi r^2 \cdot v$ .... 1 točka
   Izračun $v \doteq 21{,}22$ cm .... 1 točka
   Upoštevanje ali zapis, da sta višini obeh pločevink enaki .... 1 točka
   Izražen $r_2 = \sqrt{\frac{V_2 \cdot r_1^2}{V_1}}$ .... 1* točka
   Izračun $r_2 \doteq 3{,}24$ cm .... 1 točka
   Izračun površine spremenjene pločevinke $P = 2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 \cdot v \doteq 498\ \text{cm}^2$ .... 1 točka
   OPOMBA: Če v rezultatu ni enot, odbijemo 1 točko.

2. Narišemo logaritemsko funkcijo f s predpisom $f(x) = \log_2(x-1) + 1$ in linearno funkcijo g s predpisom $g(x) = -\frac{3}{2}x + 4$. Odčitamo rešitev $x = 2$ ter jo računsko preverimo.



   Narisan graf logaritemske funkcije .... 1 + 1* točki
   Narisan graf linearne funkcije .... 1 točka
   Odčitana rešitev $x = 2$ .... 1 točka
   Preizkus .... 1 + 1 točki

3. Izračunamo število okuženih računalnikov v eni uri $N(60) = 30 \cdot e^6 \doteq 12\,102{,}8$. V eni uri je torej okuženih največ 12102 računalnikov. Zapišemo enakost $60\,000 = 30 \cdot e^{0{,}1t}$. Logaritmiramo $0{,}1t \ln e = \ln 2\,000$. Dobimo rešitev $t = \frac{\ln 2\,000}{0{,}1} \doteq 76{,}009$. Da virus okuži $60\,000$ računalnikov je potrebnih najmanj 77 minut.

   Zapis $N(60) = 30 \cdot e^6$ .... 1 točka
   Izračun $N(60) \doteq 12\,102{,}8$ .... 1 točka
   Zapis odgovora .... 1 točka
   Zapis enakosti $60\,000 = 30 \cdot e^{0{,}1t}$ .... 1 točka
   Logaritmiranje $0{,}1t \ln e = \ln 2\,000$ .... 1 točka
   Zapis $t = \frac{\ln 2\,000}{0{,}1} \doteq 76{,}009$ .... 1 točka
   Zapis odgovora .... 1 točka

4. Zapišemo enačbo $(a-1)x^2+ax-1=x-2$ in jo uredimo $(a-1)x^2+(a-1)x+1=0$. Enačba mora imeti eno samo rešitev, zato upoštevamo pogoj $D=0$. Dobimo enačbo $a^2-6a+5=0$. Rešitvi te enačbe sta $a_1=1$ in $a_2=5$. Izločimo prvo rešitev, saj za $a=1$ enačba $y=(a-1)x^2+ax-1$ ni enačba parabole. Izračunamo koordinati presečišča $M\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

Zapis enačbe $(a-1)x^2+ax-1=x-2$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $(a-1)x^2+(a-1)x+1=0$ .... 1 točka
Zapis kvadratne enačbe $a^2-6a+5=0$ .... 1 točka
Rešitvi $a_1=1$ in $a_2=5$ .... 1 točka
Izločitev $a_1=1$ .... 1 točka
Zapis $M\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ .... $1+1$ točka

5. Dolžino parcele označimo z x in širino z y. Ploščina parcele (ploščina pravokotnika) je $x\cdot y=1632$. Ograde sestavljajo vse 4 stranice in prečna ograda: $2x+3y=198$. Dobili smo sistem enačb, najlažje ga rešimo z zamenjalnim načinom. Iz prve enačbe izrazimo npr. $y=\frac{1632}{x}$ in vstavimo v drugo enačbo. Množimo z x, dobimo kvadratno enačbo $x^2-99x+2448=0$. Dobimo dve rešitvi: $x_1=51$ ($y_1=32$) in $x_2=48$ ($y_2=34$).

Upoštevanje ploščine pravokotnika $x\cdot y=1632$ .... 1 točka
Upoštevanje obsega ograde $2x+3y=198$ .... 1 točka
Reševenje sistema enačb .... 2^* točki
Zapis kvadratne enačbe npr. $x^2-99x+2448=0$ .... 1^* točka
Rešitev $x_1=51$ in $y_1=32$ .... 1 točka
Rešitev $x_2=48$ in $y_2=34$ .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka

Četrti letnik

1. **a)** Izračunamo skupno število vseh metov $3(x-2)+2x+2(x-1)+x+2+2x+1+x=11x-5$. Zapišemo enačbo $10\,\%(11x-5)$ oziroma $11x-5=10x$. Rešimo linearno enačbo in dobimo rešitev oz. število šestic $x=5$. Z izračunanim x lahko nato določimo število metov za posamezno številko: enka je padla 9 krat, dvojka 10 krat, trojka 8 krat, štirica 7 krat in petica 11 krat.

   b) Povprečno število pik izračunamo po formuli za aritmetično sredino $\frac{1\cdot9+2\cdot10+3\cdot8+4\cdot7+5\cdot11+6\cdot5}{50}=3{,}32$.

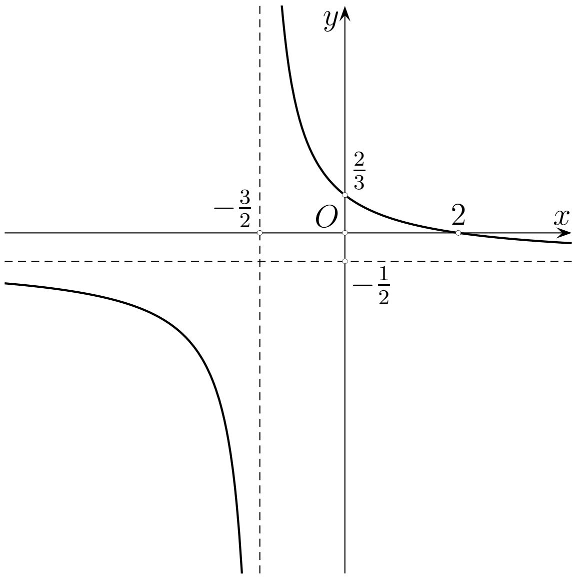
   c) Za posamezno število pik izračunamo velikost središčnega kota: enka: $\frac{9}{50}\cdot360^\circ=64{,}8^\circ$, dvojka: $\frac{10}{50}\cdot360^\circ=72^\circ$, trojka: $\frac{8}{50}\cdot360^\circ=57{,}6^\circ$, štirica: $\frac{7}{50}\cdot360^\circ=50{,}4^\circ$, petica: $\frac{11}{50}\cdot360^\circ=79{,}2^\circ$ in šestica: $\frac{5}{50}\cdot360^\circ=36^\circ$.

Zapis enačbe $10\,\%(11x-5)=x$ .... 1^* točka
Rešitev enačbe $x=5$ .... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka
Izračunano povprečje pik 3,32 .... 1 točka
Izračunani središčni koti .... 1^* točka
Narisan frekvenčni kolač .... 1 točka

2. Upoštevamo $\sin^{-1}x=\frac{1}{\sin x}$ in uredimo imenovalec $\sin x-\sin^{-1}x=\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin^2x-1}{\sin x}$. Uporabimo zvezo med sinusom in kosinusom $\sin^2x+\cos^2x=1$, iz katere izrazimo $\sin^2x-1=-\cos^2x$. Ulomek preoblikujemo v $\frac{2\cos^2x}{\frac{-\cos^2x}{\sin x}}=-2\sin x, \cos x\neq0$ in $\sin x\neq0$ oziroma $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ in $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Izraz poenostavimo $-2\sin x-\sin x=-3\sin x$. Izraz nima pomena za $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Poenostavljen imenovalec $\sin x-\sin^{-1}x=\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin^2x-1}{\sin x}$ .... $1+1^*$ točka
Poenostavljen ulomek $\frac{2\cos^2x}{\frac{-\cos^2x}{\sin x}}=-2\sin x$ .... 1 točka
Zapis izraza $-2\sin x-\sin x=-3\sin x$ .... 1 točka
Izraz nima pomena za $\cos x=0$ in $\sin x=0$ .... 1^* točka
Zapisan odgovor .... 1 točka

3. Poenostavimo predpis funkcije f: $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2(2x+3)}=\frac{-2x+4}{2(2x+3)}=\frac{2-x}{2x+3}$. Izračunamo ničlo $x=2$, pol $x=-\frac{3}{2}$, vodoravno asimptoto $y=-\frac{1}{2}$ funkcije f in koordinati presečišča grafa z ordinatno osjo $N\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Narišemo graf. Premica, ki je vzporedna z x osjo in ne seka grafa, je vodoravna asimptota $y=-\frac{1}{2}$.



Poenostavljen predpis funkcije f: $f(x) = \frac{2-x}{2x+3}$ .... 1^* točka
Izračunana ničla $x = 2$ in pol $x = -\frac{3}{2}$ .... $1 + 1$ točka
Določitev vodoravne asimptote $y = -\frac{1}{2}$ in presečišča z ordinatno osjo $N\left(0, \frac{2}{3}\right)$ ... 1 točka
Narisan graf .... $1 + 1^*$ točka
Zapisan odgovor .... 1 točka

4. Ugotovimo, da so števila sedežev v posamezni vrsti členi aritmetičnega zaporedja $a_1 = 15$ in $d = 3$, skupno število sedežev je vsota aritmetičnega zaporedja. Uporabimo formulo $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Vstavimo podatke in dobimo enačbo $870 = \frac{n}{2}(30 + (n-1) \cdot 3)$. Poenostavimo enačbo in dobimo $n^2 + 9n - 580 = 0$. Enačba ima dve rešitvi $n_1 = 20$ in $n_2 = -29$, pri čemer negativna rešitev odpade. Število sedežev v zadnji vrsti je enako $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 15 + 19 \cdot 3 = 72$. Zapišemo odgovor: Dvorana ima 20 vrst in v zadnji vrsti 72 stolov. Izračunamo zaslužek pri polni zasednosti dvorane z otroki $870 \cdot 9$ evrov $= 7830$ evrov. Rešimo neenačbo $x \cdot 12 > 7830$. Dobimo $x > 652{,}5$. Zapišemo odgovor: Dvorano mora zasesti najmanj 653 odraslih.

Zapis enačbe $870 = \frac{n}{2}(30 + (n-1) \cdot 3)$ .... 1^* točka
Zapis enačbe $n^2 + 9n - 580 = 0$ .... 1^* točka
Rešitev enačbe $n_1 = 20$ in $n_2 = -29$ .... 1 točka
Izračun števila sedežev v zadnji vrsti $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 15 + 19 \cdot 3 = 72$ ..... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka
Reševanje neenačbe $x \cdot 12 > 7830$ .... 1^* točki
Zapisan odgovor .... 1 točka

5. I. način:
Zapišemo enačbo $2x + 7 = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 7$. Enačbo uredimo in dobimo $x^4 + 3x^3 + ax^2 + (b-2)x = 0$. V enačbo vstavimo $x = 1$ in dobimo $1 + 3 + a + b - 2 = 0$ oziroma $a + b + 2 = 0$. V enačbo vstavimo še $x = -4$ in dobimo $256 - 192 + 16a - 4b + 8 = 0$ oziroma $4a - b + 18 = 0$. Rešimo sistem enačb in dobimo $a = -4$ in $b = 2$.

Zapis enakosti $2x + 7 = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 7$ .... 1 točka
Urejena enačba $x^4 + 3x^3 + ax^2 + (b-2)x = 0$ .... 1 točka

Zapis enačbe $a+b+2=0$ . . . . . . 1* točka
Zapis enačbe $4a-b+18=0$ . . . . . . 1* točka
Reševanje sistema enačb . . . . . . 2* točki
Rešitev $a=-4$ . . . . . . 1 točka
Rešitev $b=2$ . . . . . . 1 točka

II. način:
Izračunamo koordinate presečišč premice in grafa polinoma $(1,9)$ in $(-4,-1)$. Koordinate obeh točk vstavimo v predpis za polinom. Dobimo enačbi: $a+b=-2, 8a-2b=-36$. Rešimo sistem enačb in dobimo $a=-4$ in $b=2$.

Izračun ordinat točk $(1,9)$ in $(-4,-1)$ . . . . . . $1+1$ točka
Zapis enačb $a+b=-2, 8a-2b=-36$ . . . . . . 1^*+1^* točka
Reševanje sistema enačb . . . . . . 2* točki
Rešitev $a=-4$ . . . . . . 1 točka
Rešitev $b=2$ . . . . . . 1 točka