Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Sestre Neža, Meta in Ajda so med počitniškim delom v mesecu juliju zaslužile denar v razmerju $3 : 4 : 5$. V mesecu avgustu je Neža zaslužila $40\,\%$ več kot v mesecu juliju, Meta petino manj kot v juliju, Ajda pa za 200 manj kot v juliju. Skupaj so sestre v avgustu zaslužile 2280. Kakšen je bil zaslužek vsake od sester v mesecu juliju?

B2. Izračunaj vrednost izraza $0.\overline{27} \cdot (x^2 + 2yx + y^2) : (3y^2 - 3x)$, če velja $x - y = 5$ in $\frac{7x-7y}{10} - (\frac{2}{2x+y})^{-1} = 5^0$.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dan je paralelogram $ABCD$ z dolžinama stranic $|AB| = 7\ cm$ in $|BC| = 5\ cm$. Višina na stranico AB meri $4\ cm$ in kot $\alpha = \sphericalangle BAD$ je oster.

a) Z ravnilom in šestilom konstruiraj dani paralelogram in trikotniku BCD očrtaj krožnico. Središče trikotniku očrtane krožnice označi s S.

b) Velikost večjega od obeh kotov (udrtega kota) $\sphericalangle BSD$ zaokrožimo na $254°$ in uporabimo v nadaljnjih izračunih. Izračunaj koliko merijo notranji koti paralelograma.

c) V paralelogramu izračunaj velikost topega kota med simetralo stranice AD in višino na stranico AB.

B2. Dani sta enačbi $(y+3)^2 - x(x-4) = 7 + (y-x)(y+x)$ in $x + \frac{y-1}{2} = \frac{x}{2} - y$.

a) Reši sistem enačb in rešitev zapiši kot točko A v koordinatnem sistemu.

b) Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko A in ima isto presečišče z osjo x kot premica $3x + 2y - 15 = 0$ v eksplicitni, implicitni in odsekovni obliki.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Reši enačbi:

a) $\log_2(-x^3) = 6$

b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\left(\frac{27}{8}\right)^{x} = \frac{\log 125}{\log 25}$

B2. Dani sta družina premic z enačbo $y - mx + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ in parabola z enačbo $y = x^2 - 2x + 7$.

a) Izračunaj teme, začetno vrednost parabole in jo nariši v koordinatnem sistemu.

b) Določi, katere premice iz dane družine premic so tangente na dano parabolo.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Reši naslednji nepovezani nalogi.

a) Vsota prvih osmih členov aritmetičnega zaporedja je 124, prvi člen pa je enak 5. Izračunaj prve štiri člene aritmetičnega zaporedja.

b) Vsota prvih sedmih členov nekega aritmetičnega zaporedja je enaka 105. Prvi, tretji in sedmi člen danega aritmetičnega zaporedja so zaporedni trije členi nekega geometrijsko zaporedje. Izračunaj prve štiri člene aritmetičnega zaporedja.

B2. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^3-8}$.

a) Izračunaj ničle, pol, začetno vrednost in zapiši enačbo vodoravne asimptote ter skiciraj graf funkcije f.

b) Določi, za katere vrednosti spremenljivke x je graf funkcije f nad premico z enačbo $y = 1$.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
16. marec 2006

Rešitve nalog za Naloge za 1. letnik

1. Zapišemo zaslužek Neže v juliju $3x$, zaslužek Mete v juliju $4x$, zaslužek Ajde v juliju $5x$. Zapis zaslužka Neže v avgustu je $3x \cdot 1.4 = 4.2x$. Zapis zaslužka Mete v avgustu je $4x \cdot 0.8 = 3.2x$. Zapis zaslužka Ajde v avgustu je $5x - 200$. Izračunamo skupen zaslužek vseh treh sester v avgustu $4.2x + 3.2x + 5x - 200 = 2280$, preoblikujemo v $12.4x = 2480$ in dobimo $x = 200$. V juliju je Neža zaslužila $3 \cdot 200 = 600$, Meta $4 \cdot 200 = 800$ in Ajda $5 \cdot 200 = 1000$.

Zapis zaslužka Neže v mesecu juliju $3x$ .... 1 točka
Zapis zaslužka Mete v mesecu juliju $4x$ .... 1 točka
Zapis zaslužka Ajde v mesecu juliju $5x$ .... 1 točka
Zapis zaslužka Neže v mesecu avgustu $4.2x$ .... 1 točka
Zapis zaslužka Mete v mesecu avgustu $3.2x$ .... 1 točka
Zapis zaslužka Ajde v mesecu avgustu $5x - 200$ .... 1 točka
Zapis enačbe $4.2x + 3.2x + 5x - 200 = 2280$ .... 1* točka
Zapis rešitve enačbe $x = 200$ .... 1 točka
Izračun zaslužkov vseh treh sester v mesecu juliju 600, 800 in 1000 .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka

2. Število $0.\overline{27}$ zapišemo v obliki okrajšanega ulomka $\frac{3}{11}$. Enačbo $\frac{7x-7y}{10} - (\frac{2}{2x+y})^{-1} = 5^0$ preoblikujemo v $\frac{7\cdot(x-y)}{10} - \frac{2x+y}{2} = 1$. Upoštevamo 1. enačbo $x - y = 5$ in dobimo $\frac{7\cdot 5}{10} - \frac{2x+y}{2} = 1$. Ta enačba se preoblikuje v $2x + y = 5$, tako da dobimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama $x - y = 5$ in $2x + y = 5$. V primeru, da pri poenostavljanju druge enačbe ne bi uporabili $x - y = 5$, bi se druga enačba poenostavila v $3x + 12y = -10$. Rešitev sistema je $x = \frac{10}{3}$ in $y = -\frac{5}{3}$. Izračunamo še vrednost izraza $0.\overline{27} \cdot (x^2 + 2yx + y^2) : (3y^2 - 3x) = \frac{3}{11} \cdot \frac{25}{9} : (\frac{25}{3} - 10) = \frac{25}{33} \cdot (-\frac{3}{5}) = -\frac{5}{11}$.

Zapis števila $0.\overline{27}$ z ulomkom $\frac{3}{11}$ .... 1 točka
Upoštevanje pravil za računanje potenc s celimi eksponenti $(\frac{2}{2x+y})^{-1} = \frac{2x+y}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje $5^0 = 1$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe $\frac{7x-7y}{10} - (\frac{2}{2x+y})^{-1} = 5^0$ v linearno enačbo $2x + y = 5$ ali $3x + 12y = -10$ 1 točka
Reševanje sistema dveh enačb z dvema neznankama .... 1* točka
Rešitev sistema enačb $x = \frac{10}{3}$ in $y = -\frac{5}{3}$ .... 1+1 točka
Izračunana vrednost $(x^2 + 2yx + y^2) = \frac{25}{9}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost $(3y^2 - 3x) = -\frac{5}{3}$ .... 1 točka
Izračunana končna vrednost izraza $-\frac{5}{11}$ .... 1 točka
Opomba: Sistem enačb bi lahko rešili tudi z zamenjalnim načinom, iz $x - y = 5$ dobimo $x = y + 5$ in to vstavimo v drugo enačbo. V tem primeru bi točkovnik za 4. in 5. točko točkovnika spremenili v:
Zapis $x = y + 5$ ali $y = x - 5$ .... 1 točka
Uporaba zamenjalnega načina in reševanje enačbe .... 1* točka

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

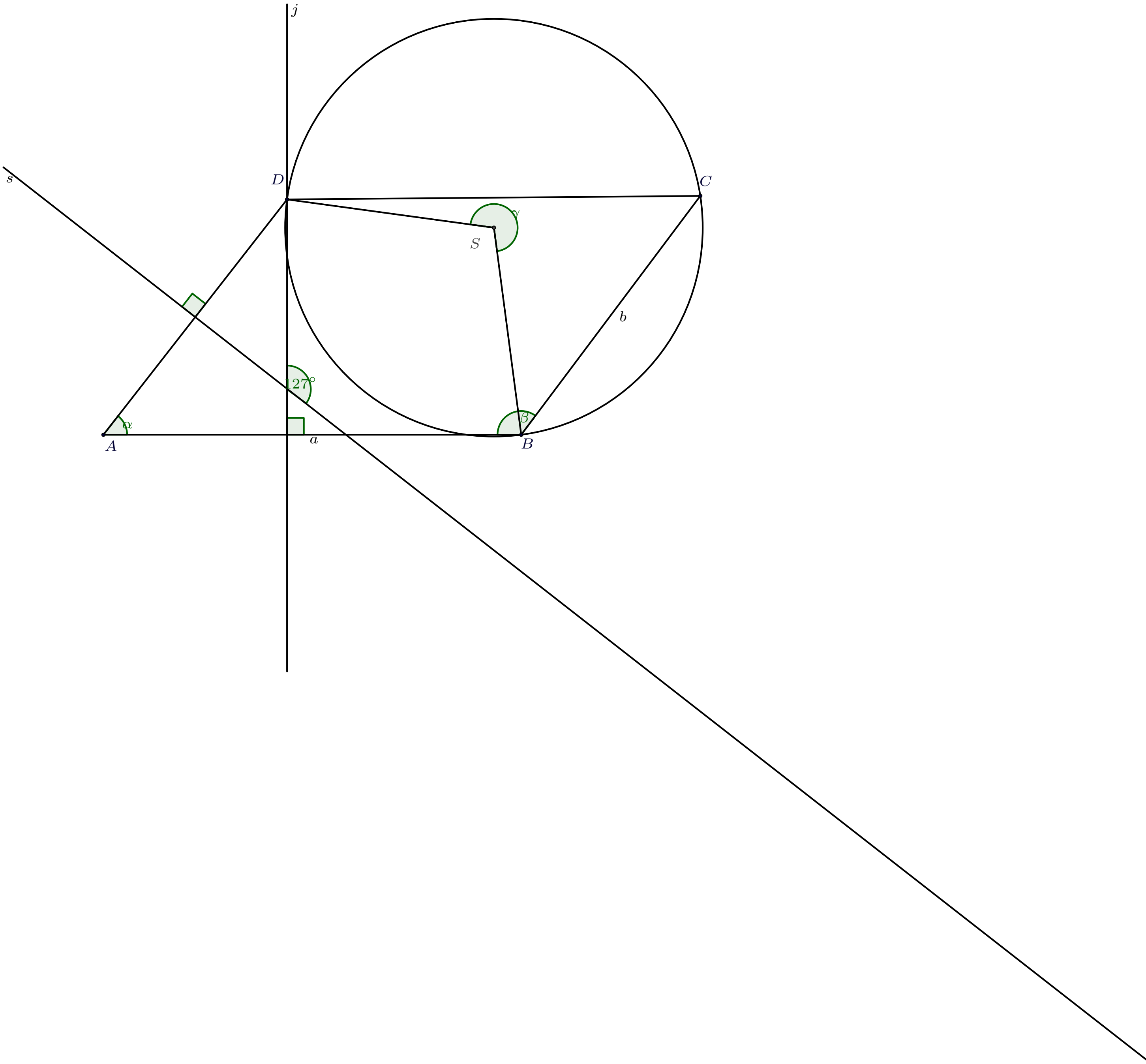
Rešitve nalog za Naloge za 2. letnik

1.

a) S šestilom in ravnilom konstruiramo paralelogram. Trikotniku BCD očrtamo krog in središče kroga označimo s S.

b) Udrti kot $\angle BSD$ meri $254°$, vbočeni kot $\angle BSD$ meri $106°$, saj skupaj tvorita polni kot. Vbočeni kot $\angle BSD$ je središčni kot, kot $\angle BCD$ paralelograma, pa je obodni kot nad istim lokom, torej kot $\angle BCD$ meri $53°$. Od tod sledi, da kot $\angle BAD$ meri $53°$. Ker je v paralelogramu vsota kotov ob osnovnici $180°$, je velikost kota $\angle ABC = 127°$.

c) Simetrala stranice AD, višina na stranico AB ter stranici AB in BC oblikujejo štirikotnik, z dvema pravima kotoma, kotom $\angle BAD$ in iskanim kotom. S pomočjo vsote notranjih kotov štirikotnika izračunamo iskani kot, ki meri $127°$.



Konstruiran paralelogram ABCD . . . . 1+1 točka
Konstruirana očrtana krožnica trikotniku BCD . . . . 1* točka
Pravilno označen udrti kot $\angle BSD$ . . . . 1 točka
Izračun velikosti vbočenega kota $\angle BSD$=106° . . . . 1 točka
Izračun kota $\angle BAD = 53°$ ali $\angle BCD = 53°$ . . . . 1* točka

Izračun kota $\angle ABC = 127^\circ$ ali $\angle ADC = 127^\circ$ .... 1* točka
Narisana simetrala na stranico AD in ugotovitev, da je pravokotna na stranico AD .... 1 točka
Narisana višina na stranico AB in ugotovitev, da je parvokotna na stranico AB .... 1 točka
Izračun ostrega kota med simetralo in višino 127° .... 1 točka

2.

a) Poenostavimo prvo enačbo do zapisa npr. $4x + 6y + 2 = 0$. Poenostavimo drugo enačbo do zapisa npr. $x + 3y - 1 = 0$. Rešimo sistem enačb s katerokoli metodo. Rešitev sistema enačb zapišemo kot točko $A(-2, 1)$.

b) Izračunamo presečišče premice $3x+2y-15 = 0$ z x osjo $(5, 0)$. Izračunamo smerni koeficient $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-1}{5+2} = \frac{-1}{7}$. Zapišemo enačbo premice npr. $y = kx + n$ in izračunamo začetno vrednost $n = \frac{5}{7}$. Zapišemo vse tri oblike enačbe premice. Eksplicitna oblika $y = \frac{-1}{7}x + \frac{5}{7}$, implicitna oblika $x + 7y - 5 = 0$ in odsekovna oblika enačbe premice $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{7}} = 1$.

Poenostavitev prve enačbe $4x + 6y + 2 = 0$ .... 1 točka
Poenostavitev druge enačbe $x + 3y - 1 = 0$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Zapis točke $A(-2, 1)$ .... 1 točka

Zapis presečišča premice $3x + 2y - 15 = 0$ z x osjo $(5, 0)$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba enačbe premice $y = kx + n$ .... 1 točka
Izračun smernega koeficienta $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-1}{5+2} = \frac{-1}{7}$ .... 1 točka
Zapis eksplicitne oblike enačbe premice $y = \frac{-1}{7}x + \frac{5}{7}$ .... 1 točka
Zapis implicitne oblike enačbe premice $x + 7y - 5 = 0$ .... 1 točka
Zapis odsekovne oblike enačbe premice $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{7}} = 1$ .... 1 točka

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

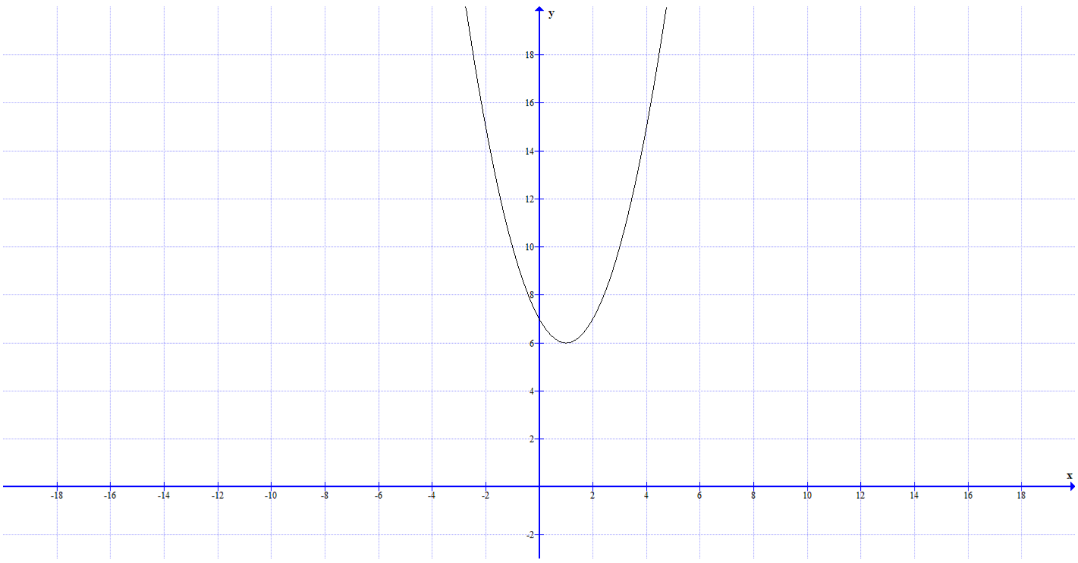
Rešitve nalog za Naloge za 3. letnik

1.

a) Upoštevamo definicijo logaritma $2^6 = -x^3$ in izračunamo $x = \sqrt[3]{-64} = -4$.

b) Preoblikujemo levo stran $(\frac{4}{9})^{x-1}(\frac{27}{8})^x = (\frac{2}{3})^{2(x-1)}(\frac{3}{2})^{3x} = (\frac{2}{3})^{2x-2}(\frac{2}{3})^{-3x} = (\frac{2}{3})^{-x-2}$
in desno stran enačbe $\frac{\log 125}{\log 25} = \frac{\log 5^3}{\log 5^2} = \frac{3\log 5}{2\log 5} = \frac{3}{2} = (\frac{2}{3})^{-1}$.
Rešimo eksponentno enačbo $(\frac{2}{3})^{-x-2} = (\frac{2}{3})^{-1}$, $-x-2=-1$. Rešitev je $x=-1$.

Upoštevanje definicije logaritma $2^6 = -x^3$ . . . . 1 točka
Reševanje enačbe $x = \sqrt[3]{-64}$ . . . . 1* točka
Rešitev $x = -4$ . . . . 1 točka
Preoblikovanje leve strani enačbe (1. korak) $(\frac{2}{3})^{2(x-1)}(\frac{3}{2})^{3x}$ . . . . 1 točka
Preoblikovanje leve strani enačbe (2. korak) $(\frac{2}{3})^{2x-2}(\frac{2}{3})^{-3x}$ . . . . 1 točka
Preoblikovanje leve strani enačbe (3. korak) $(\frac{2}{3})^{-x-2}$ . . . . 1 točka
Preoblikovanje desne strani enačbe (1. korak) $\frac{3\log 5}{2\log 5}$ . . . . 1 točka
Preoblikovanje desne strani enačbe (2. korak) $(\frac{2}{3})^{-1}$ . . . . 1 točka
Zapis enačbe $-x-2=-1$ . . . . 1* točka
Rešitev $x = -1$ . . . . 1 točka



2. Zapišemo ali na grafu upoštevamo presečišče parabole z y osjo $N(0,7)$. Upoštevajmo formule za izračun temena $p = -\frac{b}{2a} = 1, D = b^2 - 4ac = 4 - 28 = -24, q = -\frac{D}{4a} = 6$. Zapišemo teme $T(1,6)$. Ugotovimo, da parabola nima ničel. Natančno narišemo graf parabole.

Poiščemo skupno rešitev obeh enačb $x^2-2x+7 = mx-2$ in pri njenem reševanju upoštevamo pogoj, da je diskriminanta $D=0$. Dobimo enačbo $(2+m)^2-36=0$. Poiščemo rešitvi kvadratne enačbe $m=4$ in $m=-8$. Zapišemo tangenti parabole $y=4x-2$ in $y=-8x-2$.

Zapisano ali upoštevano presečišče z y osjo $N(0,7)$ . . . . 1 točka
Izračun temena $T(1,6)$ . . . . 1 točka
Ugotovitev, da parabola nima ničel . . . . 1* točka
Narisana parabola . . . . 1 točka
Zapis enačbe $x^2-2x+7 = mx-2$ . . . . 1 točka

Ureditev enačbe $(x^2) - (2 + m)x + 9 = 0$ . . . . 1 točka
Zapis ali upoštevanje pogoja $D = 0$ . . . . 1 točka
Rešitvi enačbe $m = 4$ in $m = -8$ . . . . 1+1 točka
Zapis tangent parabole $y = 4x - 2$ in $y = -8x - 2$ . . . . 1 točka

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

16. marec 2006

Rešitve nalog za Naloge za 4. letnik

1.

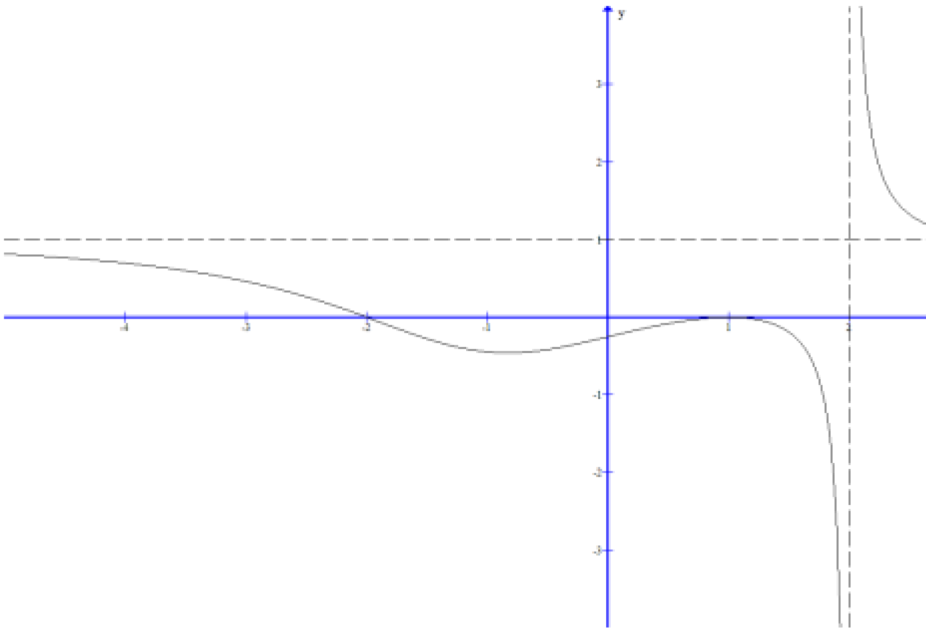
a) Zapišimo obrazec za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja. $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Vstavimo podatke za vsoto prvih 8 členov in dobimo $S_8 = \frac{8}{2}(2 \cdot 5 + 7d) = 124$. Izračunamo $d = 3$. Nato po obrazcu za splošni člen aritmetičnega zaporedja $a_n = a_1 + (n-1)d$, lahko tudi na pamet, izračunamo preostale člene zaporedja $5, 8, 11, 14$.

b) Zapišimo obrazec za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja. Za $n = 7$ dobimo: $S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + (7-1)d) = 105$. Enačbo uredimo in dobimo zvezo $a_1 + 3d = 15$. Upoštevamo podatek, da prvi, tretji in sedmi člen aritmetičnega zaporedja sami zase tvorijo geometrijsko zaporedje. Torej $q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_7}{a_3}$ oziroma $\frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{a_1+6d}{a_1+2d}$. Tudi to enačbo preuredimo in dobimo zvezo $4d^2 - 2a_1d = 0$. Za $d = 0$ dobimo konstantno aritmetično zaporedje $15, 15, 15, 15$, za $a_1 = 2d$ pa dobimo $d = 3$. Prvi člen je torej $a_1 = 6$. Spet izračunamo člene aritmetičnega zaporedja $6, 9, 12, 15$.

Zapis ali uporaba obrazca za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki $S_8 = \frac{8}{2}(2 \cdot 5 + 7 \cdot d) = 124$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe do oblike $10 + 7d = 31$ .... 1 točka
Izračun diference $d = 3$ .... 1 točka
Zapis zaporedja $5, 8, 11, 14$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + (7-1)d) = 105$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe do oblike $a_1 + 3d = 15$ .... 1 točka
Upoštevanje zveze med zaporednimi členi geometrijskega zaporedja $q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_7}{a_3}$ oziroma $q = \frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{a_1+6d}{a_1+2d}$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $d = 0$ in $2d = a_1$ .... 1 točka
Izračun oziroma zapis členov obeh aritmetičnih zaporedij, za $d = 0$ konstantno zaporedje $15, 15, 15, 15$, za $2d = a_1$ pa $6, 9, 12, 15$ .... 1 točka

2.

a) Najprej iz števca izračunamo ničle $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1$, iz imenovalca pa pol racionalne funkcije $x = 2$. Nato izračunamo začetno vrednost $f(0) = -\frac{1}{4}$ in enačbo vodoravne asimptote $y = 1$. Iz ostanka pri deljenju števca in imenovalca racionalne funkcije ugotovimo, da bo graf racionalne funkcije sekal asimptoto pri $x = \frac{10}{3}$. Ko vse to vnesemo v koordinatni sistem,



narišemo graf racionalne funkcije.

b) Iz slike grafa funkcije preberemo, da je graf funkcije f nad premico z enačbo $y = 1$ za $x \in (2, \frac{10}{3})$.

Izračun vseh ničel $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1$ . . . . 1+1 točka
Izračun pola $x = 2$ . . . . 1 točka
Izračun začetne vrednosti $f(0) = -\frac{1}{4}$ . . . . 1 točka
Zapis enačbe vodoravne asimptote $y = 1$ . . . . 1 točka
Izračun, da graf funkcije f seka vodoravno asimptoto v $x = \frac{10}{3}$ . . . . 1 točka
Narisan graf funkcije f . . . . 1+1 točka
Zapis intervala, kjer je graf funkcije f nad premico z enačbo $y = 1$ $x \in (2, \frac{10}{3})$ . . . . 2 točki