Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Danes sta Marka obiskali Maša in Zala. Maša obišče Marka vsakih 60 dni, Zala pa vsakih 72 dni. Čez koliko dni bosta Maša in Zala naslednjič na isti dan obiskali Marka?

(**A**) 360 (**B**) 365 (**C**) 4320 (**D**) 132 (**E**) 72

A2. Naj bo $a < b < 0$. Katera izmed naslednjih izrazov ima pozitivno vrednost?

(**A**) $-5a^3b^2(a-b)$ (**B**) $5a^3b^2(b-a)$ (**C**) $(a+b)^3$
(**D**) $2a^3b^2(a-b)^2$ (**E**) $-2a^3b^2(a-b)^2$

A3. Izraz $3x^3y^3 + 12x^2y^3 - 63xy^3$ je enak:

(**A**) $3xy^3(x+7)(x-3)$ (**B**) $3xy^3(x-7)(x+3)$ (**C**) $3y(x+7)(x-3)$
(**D**) $-48x^4y^3$ (**E**) $15x^5y^6 - 63xy^3$

A4. Marko je prebral $\frac{2}{3}$ knjige, Ana $\frac{7}{11}$, Peter $\frac{5}{6}$, Tomaž $\frac{20}{33}$ in Tanja $\frac{1}{2}$ knjige. Kdo je prebral največji delež knjige?

(**A**) Marko (**B**) Ana (**C**) Peter
(**D**) Tomaž (**E**) Tanja

A5. Naj bo $a = -2$ in $b = -1$. Vrednost izraza $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{1-\frac{a^{-1}}{b^{-1}}}$ je:

(**A**) 1.5 (**B**) 0.5 (**C**) 0 (**D**) -1.5
(**E**) Vrednosti izraza ni možno izračunati.

A6. Rešitvi enačbe $|2x-2| = x+5$ sta

(**A**) $x = 1$ in $x = -7$ (**B**) $x = -1$ in $x = 7$ (**C**) $x = 0$ in $x = 2$
(**D**) $x = -1$ in $x = -7$ (**E**) $x = 1$ in $x = 7$

B1. Preračunljivi Jaka se je lotil prenove stanovanja ter najel pleskarja in keramičarja. Po končanem delu je ugotovil, da bo račun visok, zato se je skušal dogovoriti za popust pri obeh mojstrih.
Če bi se pleskar strinjal z $10\ \%$ popusta in keramičar z $20\ \%$ popusta, bi prihranil 62.4 evra. Če pa bi se dogovoril s pleskarjem za $20\ \%$ popusta in keramičarjem za $10\ \%$ popusta, bi prihranil 69 evrov.
Kolikšen je skupni račun pleskarja in keramičarja brez popustov?

B2. Izračunaj $\left|2 \cdot 1\frac{1}{3} - 2\right| - 2\sqrt{3} + 2 \cdot \left|\left|3 \cdot 5^{-1} - 1.2\right| - 0.\bar{4}\right| + \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$.

B3. Pri deljenju nekega števila s 13 dobimo ostanek 3, pri deljenju z 12 pa ostanek 11 in isti količnik kot pri deljenju s 13. Izračunaj to število. Zapiši odgovor.

B4. Naj bo a realno število, $a \neq 0$, $a \neq -1$. Poenostavi izraz $\frac{a-\frac{1}{a}}{a+2+\frac{1}{a}}$.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

dMFA

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

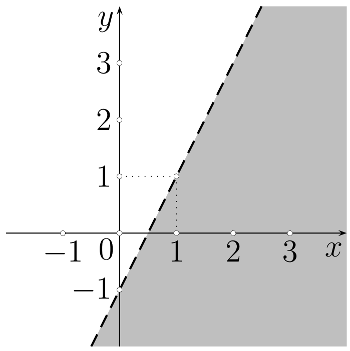
NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Katera neenačba opisuje narisano polravnino na sliki?



(**A**) $y < 2x + 1$ (**B**) $y < 2x - 1$ (**C**) $y < -2x - 1$
(**D**) $y < 2x + 2$ (**E**) $y < x - 1$

A2. Za katera realna števila v je z enačbo $\frac{x}{3} + \frac{y}{-v} = 1$ podana padajoča linearna funkcija?

(**A**) $v > 0$ (**B**) $v = 3$ (**C**) $v < 0$
(**D**) Za vsa realna števila v.
(**E**) Nemogoče je določiti.

A3. Vzporednici, ki sta med seboj oddaljeni 6 cm, seka tretja premica pod kotom $60°$. Koliko je dolg odsek sekajoče premice med vzporednicama?

(**A**) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm (**B**) 3 cm (**C**) 6 cm (**D**) $12\sqrt{3}$ cm (**E**) $4\sqrt{3}$ cm

A4. V trikotniku ABC je notranji kot pri oglišču B enak $\frac{3}{4}$ pravega kota, zunanji kot pri oglišču A pa je enak $145°$. Katera trditev je pravilna?

(**A**) Trikotnik ABC je pravokoten. (**B**) Trikotnik ABC je ostrokoten.
(**C**) Trikotnik ABC je topokoten. (**D**) Trikotnik ABC je enakokrak.
(**E**) Trikotnik z navedenimi podatki ne obstaja.

A5. Kateri račun je pravilen?

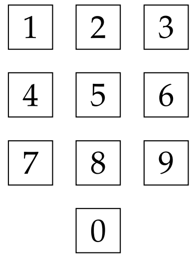
(**A**) $\sqrt{11} - \sqrt{5} = \sqrt{6}$ (**B**) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{55}$ (**C**) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5$
(**D**) $\sqrt{25 + 9} = 8$ (**E**) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}^2 = 6$

A6. Vrednost izraza $(2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}})^{20}$ je:

(**A**) $2^{20} \cdot \sqrt{2}$ (**B**) 2^{30} (**C**) $2^{10} \cdot \sqrt{2^{10}}$ (**D**) 2^{10} (**E**) $\sqrt{2}^{40}$

B1. Poišči koordinate točke A na simetrali lihih kvadrantov, ki je od točke $B(-5,-1)$ oddaljena $2\sqrt{2}$ enot.

B2. Tipke na telefonski številčnici so razporejene tako, kot kaže slika. Razdalja med središčema poljubnih sosednjih tipk je enaka 2 cm. Koliko centimetrov je dolga najkrajša črta, ki jo zarišemo s prstom, če vtipkamo številko 02954310 in vedno pritisnemo točno na sredino tipke?



B3. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(16^{\frac{1}{8}}+\left(27^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{0,5}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

ne da bi uporabil žepno računalo.

B4. Če premico, dano z enačbo $x+3y+3=0$, prezrcalimo preko abscisne osi, dobimo premico, katere enačba je $y=kx+n$. Nariši skico in izračunaj vsoto $k+n$.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Katera izmed navedenih funkcij ni kvadratna?

(A) $f(x)=x^2-5x+2$ **(B)** $f(x)=(x+3)(x-5)-x^2$ **(C)** $f(x)=(2x-1)x-x^2$
(D) $f(x)=-x^2+4$ **(E)** $f(x)=-3(x+2)^2-7$

A2. Katero izmed navedenih števil je rešitev enačbe $\sqrt{3}x^2+2x=\sqrt{3}$?

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** 3 **(E)** $3\sqrt{3}$

A3. Dolžine stranic trikotnika merijo 5 cm, 12 cm in 13 cm. Koliko meri kot nasproti najdaljše stranice tega trikotnika?

(A) $150°$ **(B)** $135°$ **(C)** $120°$ **(D)** $90°$ **(E)** $60°$

A4. Površina enakostraničnega valja je 150π cm^2. Ploščina njegovega osnega preseka je:

(A) 40 cm^2 **(B)** 50 cm^2 **(C)** 75 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 100 cm^2

A5. Katera izmed navedenih točk leži na grafu eksponentne funkcije, dane s predpisom $f(x)=-2\cdot 2^{5x-1}+4$?

(A) $A(-3,0)$ **(B)** $B(-3,6)$ **(C)** $C(-\frac{1}{5},3\frac{1}{2})$ **(D)** $D(1,28)$
(E) Nobena od navedenih točk ne leži na tem grafu.

A6. Rešitev enačbe $5^x=15$ je:

(A) $x=3$ **(B)** $x=\log 3$ **(C)** $x=\log_5 15$
(D) $x=\log_{15} 5$ **(E)** $x=\log_5 3$

B1. Določi definicijsko območje funkcije $f(x)=\sqrt{2x^2+3x-5}$.

B2. Osnovna ploskev pokončne prizme je romb, katerega diagonali sta dolgi 16 cm in 12 cm, diagonala stranske ploskve pa je dolga 15 cm.

Natančno izračunaj prostornino in površino te prizme.

B3. Reši enačbo $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot \sqrt[4]{4^x} \cdot 0.25^x=(-2)^4 \cdot 4^{x+3}$.

B4. Reši enačbo $\log_4(x-2)-\log_4(x+1)=2$.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

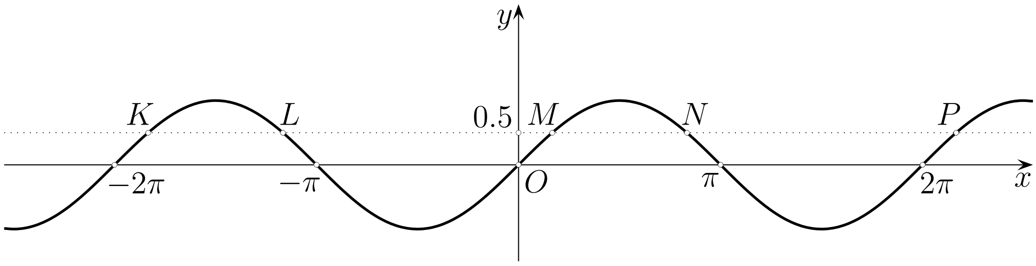
NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Abscise narisanih točk K, L, M, N in P na sliki:



so rešitve enačbe:

(A) $2\sin x - 1 = 0$ **(B)** $2\sin x + 1 = 0$ **(C)** $2\cos x - 1 = 0$
(D) $2\cos x + 1 = 0$ **(E)** nič od navedenega

A2. Katera trditev ni pravilna?

(A) $270° = \frac{3\pi}{2}$ radianov **(B)** $\sin 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **(C)** $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(D) Sinus in kosinus sta periodični funkciji s periodo 2π.

(E) Tangens kota je razmerje med kosinusom in sinusom istega kota.

A3. Za katero naravno število n in realno število a je $p(x) = (3x^2 - 2)^n \cdot (3x^2 - 5x + a)$ polinom stopnje 14 s prostim členom -64?

(A) $n = 6$ in $a = -1$ **(B)** $n = 6$ in $a = 1$ **(C)** $n = 1$ in $a = -6$ **(D)** $n = 1$ in $a = 0$
(E) Taki dve števili n in a ne obstajata.

A4. Podana je racionalna funkcija s predpisom $f(x) = x - \frac{x+2}{x}$. Njeni ničli sta:

(A) 0 in -2 **(B)** 1 in -2 **(C)** 2 in -1 **(D)** 1 in 2
(E) Ta racionalna funkcija nima dveh ničel.

A5. Dani sta zaporedji $a_n = \frac{1}{n}$ ter $b_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Katero izmed navedenih zaporedij vsebuje člen z vrednostjo 0?

(A) a_n **(B)** b_n **(C)** $a_n + b_n$ **(D)** $2a_n - b_n$ **(E)** $a_n - 3b_n$

A6. Kolikšen je prvi člen geometrijskega zaporedja, če je njegov količnik enak $\frac{1}{2}$, petdeseti člen pa 2^{-49}?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8
(E) Nič od navedenega.

B1. Dana je funkcija $f(x) = -2\sin 2x$.

(a) Natančno izračunaj $f(\frac{\pi}{4})$ in $f(120°)$.

(b) Poenostavi izraz $(\frac{f(x)}{-2\cos x})^2 + 4\cos^2 x$.

B2. Določi vrednost parametrov a in b, tako da bo število 1 ničla racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + (a-2)x + b}{x^2 + (b+2)x - a},$$

$\sqrt{2}$ pa njen pol.

B3. Jan ima 6 bombonov več kot Žan. Kvadrat števila Janovih bombonov je za 36 za večji od kuba števila Žanovih bombonov. Koliko bombonov ima vsak izmed njiju? Poišči vse možnosti.

B4. Janez je v začetku leta vložil v banko 1000 EUR. Banka daje za hranilne vloge 10 % obresti na leto. Janez v prihodnjih letih ne bo več vlagal v banko, niti ne bo dvigoval denarja iz nje. Izračunaj, koliko denarja bo imel Janez v banki po preteku 2 let. Najmanj koliko let bo moral varčevati, da bo imel 1780 EUR?

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

9. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	E	A	C	D	B

A1. Določimo najmanjši skupni večkratnik števil 60 in 72, ki je 360.

A2. Ker je $a < b$, je $a - b < 0$ in $b - a > 0$. Zato je $-2a^3b^2(a-b)^2$ edini izraz, ki ima pozitivno vrednost.

A3. Izpostavimo skupni faktor $3xy^3$ in uporabimo Vietovo pravilo, tako dobimo $3xy^3(x+7)(x-3)$.

A4. Velja $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{7}{11} > \frac{20}{33} > \frac{1}{2}$, zato je največ prebral Peter.

A5. Vstavimo vrednosti v izraz in izračunamo vrednost ulomka. Dobimo

$$\frac{(-2)^{-2} - (-1)^{-2}}{1 - \frac{(-2)^{-1}}{(-1)^{-1}}} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{1 - \frac{1}{2}} = -1.5.$$

A6. Upoštevamo, da je $2x - 2 = x + 5$ ali $2x - 2 = -x - 5$. Enačbi rešimo in dobimo rešitvi $x = 7$ in $x = -1$.

Sklop B

B1. Glede na besedilo naloge nastavimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$0.1x + 0.2y = 62,4 \text{ in } 0.2x + 0.1y = 69,$$

pri čemer z x označimo ceno pleskarja in z y ceno keramičarja. Rešimo nastali sistem enačb in izračunamo, da je $x = 252$ EUR in $y = 186$ EUR. Skupni račun znaša $252 + 186 = 438$

EUR. Zapišemo odgovor.

x je cena pleskarja
y je cena keramičarja
Zapis sistema dveh enačb z dvema neznankama:
$0.1x + 0.2y = 62,4$ .... 1 točka
$0.2x + 0.1y = 69$ .... 1 točka
Pravilen postopek reševanja sistema .... 1 točka
Izračun vrednosti $x = 252$ EUR .... 1 točka
Izračun vrednosti $y = 186$ EUR .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka

B2. Izračunamo vrednost izraza v 1. absolutni vrednosti $|2 \cdot \frac{4}{3} - 2| = \frac{2}{3}$. Izračunamo še izraz v drugi absolutni vrednosti $||3 \cdot 5^{-1} - 1.2| - 0.\bar{4}| = \frac{7}{45}$. Združimo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$, delno korenimo in dobimo $2\sqrt{3}$. Izraz poenostavimo in izračunamo vrednost $\frac{44}{45}$.

Izračun 1. absolutne vrednosti $|2 \cdot \frac{4}{3} - 2| = \frac{2}{3}$ .... 1 točka
Zapis $0.\bar{4} = \frac{4}{9}$ .... 1 točka
Izračun $3 \cdot 5^{-1} - 1,2 = -\frac{3}{5}$ .... 1 točka
Izračun 2. absolutne vrednosti $\frac{7}{45}$ .... 1 točka
Izračun $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{44}{45}$ .... 1 točka

B3. Naj bo a iskano število. Po besedilu nastavimo zvezo $a = 13 \cdot k + 3$ in $a = 12 \cdot k + 11$. Nastavimo enakost $13 \cdot k + 3 = 12 \cdot k + 11$. Uredimo in izračunamo $k = 8$ in vrednost števila $a = 107$.

Nastavitev zveze $a = 13 \cdot k + 3$ .... 1 točka
Nastavitev zveze $a = 12 \cdot k + 11$ .... 1 točka
Nastavitev enakosti $13 \cdot k + 3 = 12 \cdot k + 11$ .... 1 točka
Izračun $k = 8$ .... 1 točka
Izračun števila $a = 107$ .... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka

B4. Števec uredimo z razširitvijo na skupni imenovalec $a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}$. Uredimo tudi imenovalec $a + 2 + \frac{1}{a} = \frac{a^2+2a+1a}{a} = \frac{(a+1)^2}{a}$. Dvojni ulomek preoblikujemo v enojnega $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)^2}$. Števec razstavimo $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$, ulomek okrajšamo in dobimo $\frac{a-1}{a+1}$.

Ureditev števca $a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}$ .... 1 točka
Ureditev imenovalca $a + 2 + \frac{1}{a} = \frac{a^2+2a+1a}{a} = \frac{(a+1)^2}{a}$ .... 1 točka
Preoblikovanje v enojni ulomek $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)^2}$ .... 1 točka
Zapis števca $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ .... 1 točka
Krajšanje .... 1 točka
Rezultat $\frac{a-1}{a+1}$ .... 1 točka

Drugi letnik

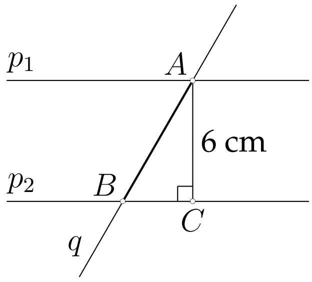
Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	C	E	B	B	D

A1. Premica, ki razdeli ravnino na dve polravnini, poteka skozi točki $(1,1)$ in $(0,-1)$. Enačba premice je tako $y = 2x - 1$, zato je enačba narisane polravnine $y < 2x - 1$.

A2. Premico zapišemo v eksplicitni obliki $y = \frac{v}{3}x - v$. Da bo premica graf padajoče linearne funkcije mora biti v negativno število.

A3. Uporabimo kotne funkcije v pravokotnem trikotniku ABC. Torej je $\sin 60° = \frac{|AC|}{|AB|}$, od koder izrazimo $|AC| = \frac{6}{\sin 60°} = 4\sqrt{3}$ cm.



A4. Izračunamo velikosti notranjih kotov $\alpha = 35°$, $\beta = 67.5°$ in $\gamma = 77.5°$. Trikotnik ABC je ostrokoten, a ni enakokrak.

A5. Pravilen je le račun $\sqrt{11} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{55}$.

A6. Racionaliziramo ulomek $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Izračunamo razliko $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ter $(\sqrt{2})^{20} = 2^{10}$.

Sklop B

B1. Ugotovimo, da sta abscisa in ordinata iskane točke enaki. Uporabimo obrazec za izračun razdalje med točkama A in B. Nastavimo enačbo $\sqrt{(x+5)^2 + (x+1)^2} = 2\sqrt{2}$. Enačbo kvadriramo $x^2 + 10x + 25 + x^2 + 2x + 10 = 8$ in poenostavimo $x^2 + 6x + 9 = 0$. Rešitev enačbe je $x = -3$. Zapišemo koordinate točke $A(-3,-3)$.

Ugotovitev ali uporaba $A(x,x)$ .... 1 točka
Nastavitev enačbe $\sqrt{(x+5)^2 + (x+1)^2} = 2\sqrt{2}$ .... 1 točka
Kvadriranje $x^2 + 10x + 25 + x^2 + 2x + 10 = 8$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $2(x^2 + 6x + 9) = 0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x = -3$ .... 1 točka
Zapis točke $A(-3,-3)$ .... 1 točka

B2. Izračunamo dolžino med zaporedno pritisnjenimi tipkami:
$0 \to 2 : d_1 = 6$ cm
$2 \to 9 : d_2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm
$9 \to 5 : d_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm
$5 \to 4 : d_4 = 2$ cm
$4 \to 3 : d_5 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

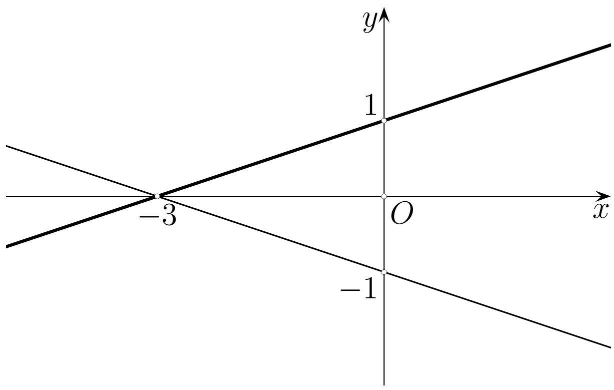
$3 \to 1: d_6 = 4$ cm
$1 \to 0: d_7 = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm.
Najkrajša pot meri $12 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$ cm.

Izračun dolžine poti d_1, d_4, d_6 .... 1 točka
Uporaba Pitagorovega izreka za izračun dolžin d_2, d_3, d_5, d_7 .... $1+1+1+1$ točka
Izračunana najkrajša razdalja $12 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$ cm .... 1 točka

B3. Poenostavimo vsakega od izrazov $16^{\frac{1}{8}} = \sqrt{2}, (27^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} = 3, (\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} = 3, 2^{0.5} = \sqrt{2}$. Celoten izraz zapišemo $(2^{\frac{1}{2}}+3)(2^{\frac{1}{2}}-3)$, odpravimo oklepaje in dobimo $(2^{\frac{1}{2}})^2 - 3^2 = -7$.

Izračun $16^{\frac{1}{8}} = \sqrt{2}$ (ali $2^{\frac{1}{2}}$) .... 1 točka
Izračun $(27^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} = 3$ .... 1 točka
Izračun $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} = 3$ .... 1 točka
Izračun $2^{0.5} = \sqrt{2}$ .... 1 točka
Izračun $(2^{\frac{1}{2}}+3)(2^{\frac{1}{2}}-3) = (2^{\frac{1}{2}})^2 - 3^2$ .... 1 točka
Rešitev -7 .... 1 točka

B4. Narišemo premico $x + 3y + 3 = 0$ in jo prezrcalimo preko abscisne osi. Ugotovimo, da na prezrcaljeni premici ležita točki $(-3, 0)$ in $(0, 1)$. Uporabimo segmentno ali eksplicitno obliko enačbe premice. Določimo oziroma izračunamo k in n prezrcaljene premice. Seštevek $k + n = \frac{4}{3}$.



Slika z narisanima premicama .... 2 točki
Določitev odsekov z osema prezrcaljene premice .... 1 točka
Izračun $k = \frac{1}{3}$ .... 1 točka
Izračunan $n = 1$ .... 1 točka
Izračuna vsote $k + n = \frac{4}{3}$ .... 1 točka

Tretji letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	B	D	E	C	C

A1. Drugi primer je linearna funkcija in je edina, ki ni kvadratna.

A2. Enačbo uredimo $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$. Uporabimo obrazec $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ ter izračunamo rešitvi $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ in $-\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

A3. Uporabimo kosinusni izrek za izračun največjega kota, ki leži nasproti najdaljše stranice ali pa prepoznamo Pitagorejsko trojico $13^2 = 5^2 + 12^2$. Tako največji kot meri 90°.

A4. Uporabimo formulo za površino valja $P = 2\pi r^2 + 2\pi rv$. Upoštevamo, da za enakostranični valj velja $v = 2r$ ter vstavimo v $P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r$. Vstavimo podatek za površino in dobimo $150\pi = 6\pi r^2$. Izračunamo, da je $r = 5$ cm. Izračunamo osni presek valja $2r \cdot v = 2r \cdot 2r = 100$ cm^2.

A5. Preverimo, da je C edina izmed zapisanih točk, ki leži na grafu.

A6. Upoštevamo definicijo logaritma in izrazimo $x = \log_5 15$.

Sklop B

B1. Kvadratni koren je definiran za nenegativne vrednosti, torej velja $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$. Zapišemo kvadratno enačbo $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Izračunamo ničli $x_1 = 1$ in $x_2 = -\frac{5}{2}$. Upoštevamo, kje na realni osi je kvadratna funkcija pozitivna oziroma enaka nič in zapišemo definicijsko območje $D_f = (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [1, \infty)$.

Zapis ali uporaba pogoja $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba kvadratne enačbe $2x^2 + 3x - 5 = 0$ .... 1 točka
Izračun rešitev $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{2}$ .... $1 + 1$ točka
Zapis definicijskega območja $D_f = (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [1, \infty)$ .... 2 točka

B2. Z uporabo Pitagorovega izreka izračunamo rob romba $a = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2}$. Izračunamo še višino prizme $v = \sqrt{d^2 - a^2} = 5\sqrt{5}$ cm. Podatke vstavimo v formulo za površino prizme $P = e \cdot f + 4a \cdot v = (192 + 200\sqrt{5})$ cm^2. Podatke vstavimo še v formulo za prostornino prizme $V = \frac{e \cdot f}{2} \cdot v = 480\sqrt{5}$ cm^3.

Izračun stranice romba $a = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2} = 10$ cm .... 1 točka
Izračun višine prizme $v = \sqrt{d^2 - a^2} = 5\sqrt{5}$ cm .... 1 točka
Izračun ploščine osnovne ploskve $S = \frac{e \cdot f}{2} = 96$ cm^2 .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za površino $P = e \cdot f + 4a \cdot v$ .... 1 točka
Izračun vrednosti površine $P = (192 + 200\sqrt{5})$ cm^2 .... 1 točka
Izračun prostornine $V = \frac{e \cdot f}{2} \cdot v = 480\sqrt{5}$ cm^3 .... 1 točka
OPOMBA: Za neprimerne enote se odšteje ena točka.

B3. Potence zapišemo z enako osnovo 2, tako dobimo enačbo $2^x \cdot (2^2)^{\frac{x}{4}} \cdot 2^{-2x} = 2^4 \cdot 2^{2(x+3)}$. Upoštevamo pravila za računanje s potencami in dobimo enačbo $2^{\frac{x}{2}-x} = 2^{2x+10}$. Upoštevamo, da velja $\frac{x}{2} - x = 2x + 10$. Nastalo enačbo rešimo in dobimo rešitev $x = -4$.

Poenostavitev leve strani enačbe do zapisa $2^x \cdot 4^{\frac{x}{4}} \cdot 2^{-2x}$ .... 1 točka
Zapis desne strani enačbe z enako osnovo $2^4 \cdot 2^{2(x+3)}$ .... 1 točka
Zapis enačbe s potencamo z enako osnovo $2^x \cdot (2^2)^{\frac{x}{4}} \cdot 2^{-2x} = 2^4 \cdot 2^{2x+6}$ .... 1 točka
Upoštevanje pravila za množenje potenc z enako osnovo $2^{x+\frac{x}{2}-2x} = 2^{2x+10}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{x}{2} - x = 2x + 10$ .... 1 točka
Rešitev $x = -4$ .... 1 točka

B4. Upoštevamo razliko logaritmov in zapišemo $\log_4 \frac{x-2}{x+1} = 2$. Uporabimo definicijo logaritma in dobimo enačbo $4^2 = \frac{x-2}{x+1}$. Odpravimo ulomek $16x + 16 = x - 2$, enačbo uredimo in dobimo rešitev $x = -\frac{6}{5}$. Preverimo ustreznost rešitve ter ugotovimo, da enačba nima rešitve.

Upoštevanje razlike logaritmov $\log_4 \frac{x-2}{x+1} = 2$ .... 1 točka
Uporaba definicije logaritma $4^2 = \frac{x-2}{x+1}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $16x + 16 = x - 2$ .... 2 točki
Rešitev enačbe $-\frac{6}{5}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da enačba nima ustrezne rešitve .... 1 točka

Četrti letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	E	A	C	D	E

A1. Ugotovimo, da je na sliki graf funkcije $f(x) = \sin x$. Ordinate narisanih točk K, L, M, N, P na sliki so enake $\frac{1}{2}$, zato so njihove abscise rešitve enačbe $\sin x = \frac{1}{2}$ oziroma $2\sin x - 1 = 0$.

A2. Za preverjanje pravilnosti odgovora (**B**) uporabimo adicijski izrek $\sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Tudi v (**C**) uporabimo adicijski izrek $\sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ in ugotovimo pravilnost zapisa. Nepravilen odgovor je (**E**), saj je tangens kota razmerje med sinusom in kosinusom istega kota.

A3. Pomnožimo prva člena faktorjev $(3x^2)^n \cdot 3x^2 = 3^{n+1} \cdot x^{2n+2}$. Upoštevamo stopnjo polinoma in zapišemo enakost $2n + 2 = 14$. Rešitev je $n = 6$. Upoštevamo še prosti člen in zapišemo $(-2)^n \cdot a = (-2)^6 a = 64$. Izračunamo rešitev $a = -1$. Ustreza odgovor (**A**).

A4. Uredimo zapis za racionalno funkcijo $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x}$. Ničli sta rešitvi enačbe $x^2 - x - 2 = 0$, torej $x_1 = 2$ in $x_2 = -1$.

A5. Preverimo ustreznost koordinat zapisanih točk.

A6. Splošni členi zapisanih zaporedij so $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 2n$, $a_n + b_n = \frac{2n^2+1}{n}$, $2a_n - b_n = \frac{2-2n^2}{n}$ in $a_n - 3b_n = \frac{1-6n^2}{n}$. Zato vidimo, da le zaporedje $2a_n - b_n$ vsebuje člen z vrednostjo 0.

Sklop B

B1. **a)** Izračunamo vrednosti kotnih funkcij za kota $\frac{\pi}{4}$ in 120°. Pri drugem kotu upoštevamo še prehod na oster kot.

b) Vstavimo funkcijski predpis za $f(x) = -2\sin 2x$, poenostavimo ulomek do oblike $2\sin x$ in ga kvadriramo. Upoštevamo zvezo med funkcijama $\sin x$ in $\cos x$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) in dobimo rezultat 4.

Izračun vrednosti $f(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2$ .... 1 točka
Prehod na oster kot $f(120^\circ) = -2 \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 2 \cdot \sin 60^\circ$ .... 1 točka
Izračun $f(120^\circ) = \sqrt{3}$ .... 1 točka
Uporaba $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ .... 1 točka
Ureditev ulomka in pravilno kvadriranje
$(\frac{-4\sin x \cdot \cos x}{-2\cos x})^2 + 4\cos^2 x = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x$ .... 1 točka
Rezultat 4 .... 1 točka

B2. Upoštevamo, da je število 1 ničla racionalne funkcije in določimo enačbo $1+1+(a-2)+b = 0$. Upoštevamo tudi, da je $-\sqrt{2}$ pol racionalne funkcije in nastavimo enačbo $2-\sqrt{2}(b+2)-a = 0$. Obe enačbi poenostavimo $a+b = 0$ in $-a-\sqrt{2}b = 2\sqrt{2}-2$ ter rešimo sistem enačb. Rešitvi sta $b = -2, a = 2$.

Nastavitev enačbe $1 + 1 + (a - 2) + b = 0$ .... 1 točka
Nastavitev enačbe $2 - \sqrt{2}(b + 2) - a = 0$ .... 1 točka
Ureditev enačb $a + b = 0$ in $-a - \sqrt{2}b = 2\sqrt{2} - 2$ .... 1 točka

Reševanje sistema dveh enačb z dvema neznankama .... 1 točka
Rešitev $b = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = -2$ .... 1 točka
Rešitev $a = 2$ .... 1 točka

B3. Označimo število Žanovih bonbonov z x, Janovih pa z y. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo $y = x + 6$ ter zapišemo enačbo $(x + 6)^2 = x^3 + 36$. Enačbo poenostavimo $x^3 - x^2 - 12x = 0$. Rešitve so $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ in $x_3 = 0$. Negativna rešitev ne ustreza. Ker ima Jan 6 bonbonov več kot Žan, imamo dve možni rešitvi:
Če ima Žan 4 bonbone, jih ima Jan 10. Če pa je Žan brez bonbonov, jih ima Jan 6.

x je število Žanovih bonbonov
y je število Janovih bonbonov
Upoštevanje trditve $y = x + 6$ .... 1 točka
Zapis enačbe $(x + 6)^2 = x^3 + 36$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $x^3 - x^2 - 12x = 0$ .... 1 točka
Ugotovitev, da $x_1 = -3$ ne ustreza .... 1 točka
Ugotovitev $x_2 = 0 \Rightarrow y = 6$ in $x_3 = 4 \Rightarrow y = 10$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B4. Zapišemo obrazec za izračun glavnice po n letih obrestnega obrestovanja. Izračunamo glavnico po dveh letih obrestnega obrestovanja z začetno glavnico 1000 EUR in obrestno mero $p = 10\%$. Izračunamo 1210 EUR. Nato izračunamo še čas, ki je potreben za privarčevani znesek 1780 EUR.

Uporaba obrazca $G_n = G_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ .... 1 točka
Izračun $G_2 = 1000 \cdot 1,1^2 = 1210$ .... 1 točka
Vstavitev podatkov $1780 = 1000 \cdot 1,1^n$ .... 1 točka
Zapis $n = \frac{\log 1,78}{\log 1,1}$ .... 1 točka
Izračun $n \doteq 6,04$ .... 1 točka
Odgovor: Varčevati bo moral najmanj 7 let. .... 1 točka