Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Za koliko $\%$ se spremeni vrednost nekega ulomka, katerega števec povečamo za 5%, imenovalec pa za 20%

(**A**) poveča za 25% (**B**) zmanjša za $12,5\%$ (**C**) ostane enak
(**D**) zmanjša za 25% (**E**) se poveča za $12,5\%$

A2 S katerim najmanjšim naravnim številom moramo množiti $2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot 6^3$, da dobimo popoln kvadrat?

(**A**) 60 (**B**) 15 (**C**) 5 (**D**) 2 (**E**) 3

A3 Za katere vrednosti naravnega števila n je vrednost izraza $\frac{n}{60}$ med $\frac{1}{6}$ in $\frac{1}{5}$?

(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 1 (**E**) 14

A4 Naj bo $a < -2$ in $b > -1$. Katera izmed naslednjih izjav je pravilna za vsak $a, b \in \mathbb{Z}$?

(**A**) $ab \leq 0$ (**B**) $a + b > 0$ (**C**) $ab > 0$ (**D**) $a = b$ (**E**) $a - b > 0$

A5 Kvadrat lihega naravnega števila povečamo za 3. To število je deljivo:

(**A**) s 4 (**B**) s 5 (**C**) s 4 in s 5 (**D**) samo z 1
(**E**) ni takega števila

A6 Če je $3ax + b = c$, potem je x enak:

(**A**) $c - b + 3a$ (**B**) $c + b - 3a$ (**C**) $\frac{c+b}{3a}$ (**D**) $\frac{b-c}{3a}$
(**E**) nič od navedenega

II. DEL

B1 Izračunaj število, za katerega velja: če mu prištejemo obratno vrednost in dobljeno vsoto delimo z njegovo nasprotno vrednostjo, dobimo vrednost $-1,04$.

(7 točk)

B2 Poišči največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik izrazov: $24x^4-24x^3+6x^2$, $64x^3-8, 48x^2-12$.

(6 točk)

B3 Poenostavi izraza $(x+2)^2-(x-2)(x+2)-4x^2+\frac{2}{x}$ in natančno izračunaj vrednost izraza za $x=\sqrt{2}$. Rezultat racionaliziraj.

(6 točk)

B4 Če bi vsi učenci v razredu sedeli vsak v svoji klopi, bi bilo 11 klopi premalo. Če pa bi vsaki klopi sedela po dva učenca, bi bilo 5 klopi preveč. Koliko je klopi in koliko učencev je v razredu?

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Določi vrednost parametra m tako, da bo graf funkcije $f(x) = (2m+3)x - (1-2m)$ sekal abscisno os pri 3.

(**A**) $m = 3$ (**B**) $m = 2$ (**C**) $m = 1$ (**D**) $m = -1$ (**E**) $m = 0$

A2 Ena od stranic enakostraničnega trikotnika leži vzdolž osi x. Koliko je produkt smernih koeficientov nosilk tega trikotnika?

(**A**) 0 (**B**) -3 (**C**) 3 (**D**) $2\sqrt{3}$ (**E**) $-2\sqrt{3}$

A3 Koliko meri kot α, če je vsota njegovega komplementarnega in suplementarnega kota enaka 4α?

(**A**) $15°$ (**B**) $30°$ (**C**) $45°$ (**D**) $60°$ (**E**) $25°$

A4 Ploščini dveh podobnih trikotnikov sta v razmerju $4 : 9$. Ena izmed stranic manjšega trikotnika meri 6 cm. Enakoležna stranica v večjem trikotniku meri:

(**A**) 9 cm (**B**) $13,5$ cm (**C**) 4 cm (**D**) 12 cm
(**E**) nič od navedenega

A5 Izraz $(((a^{x+y})^{x-y})^{x^2+y^2})^{x^4+y^4}$ lahko zapišemo tudi v obliki:

(**A**) $a^{x^{16}-y^{16}}$ (**B**) $a^{x^6-y^6}$ (**C**) a (**D**) $x^8 - y^8$ (**E**) $a^{x^8-y^8}$

A6 Natančna vrednost izraza $\sqrt[6]{0,125^{-0,\overline{6}}}$ je:

(**A**) $\sqrt[3]{2}$ (**B**) $\sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt[3]{5}$ (**D**) $\sqrt[6]{2}$ (**E**) $\sqrt[6]{5}$

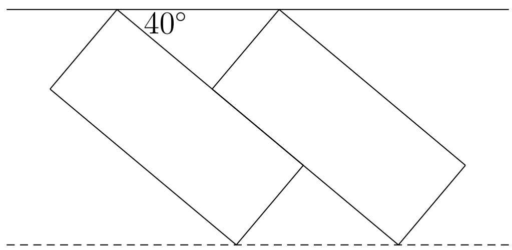
II. DEL

B1 Za pogovore z mobilnim telefonom Jana uporablja paket, ki se odlikuje po enotni ceni klicev v vsa omrežja v Sloveniji. Tako je mesečni račun za njene pogovore z mobilnim telefonom odvisen od mesečne naročnine in števila minut njenih odhodnih klicev. V mesecu septembru je imela 75 minut odhodnih klicev. Račun je znašal $15,45$ evra. V mesecu oktobru je za 113 minut plačala $20,01$ evra. Kolikšna je cena mesečne naročnine in cena minute pogovora?

(7 točk)

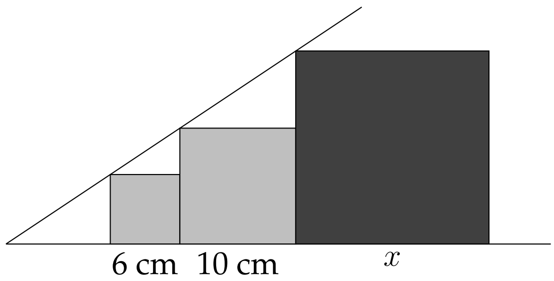
B2 Prvošolka Nina se je igrala z dominami. Domine so bile pravokotne oblike širine 3 cm in dolžine 7 cm. Zložila jih je ob rob mize kot kaže slika. Daljša stranica domine oklepa z robom mize kot $40°$. Koliko je skrajno zunanje oglišče domine oddaljeno od roba mize? Rezultat naj bo na milimeter natančen.

(6 točk)



B3 V kotu so včrtani trije kvadrati (glej sliko). Natančno izračunaj stranico x tretjega kvadrata.

(6 točk)



B4 Poenostavite izraz $3^{2n-1} \cdot 4^{n+1} + 9^{n+1} \cdot 2^{2n-1} + 6^{2n-1}$ in ga zapiši v obliki potence z osnovo 6.

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

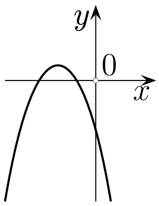
NALOGE ZA TRETJI LETNIK

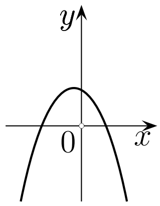
Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

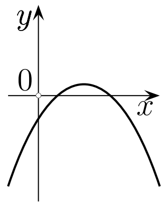
A1	A2	A3	A4	A5	A6

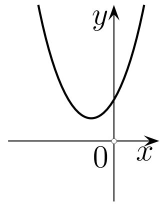
B1	B2	B3	B4

A1 Kateri izmed grafov na slikah je lahko graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer so a, b in c negativna realna števila?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) nič od navedenega

A2 Množica realnih števil k, za katera je funkcija $f(x) = x^2 - (k-1)x + 1$ pozitivna za vsak $x \in \mathbb{R}$, je:

(**A**) $(-\infty, -1)$ (**B**) $(-2, 2)$ (**C**) $[-1, 3)$ (**D**) $(-1, 3)$ (**E**) $(-1, 3]$

A3 Kolikokrat moramo prepogniti list papirja, da bo zloženka imela 512 listov?

(**A**) petkrat (**B**) sedemkrat (**C**) devetkrat (**D**) desetkrat
(**E**) nič od navedenega

A4 Graf funkcije $f(x) = \log_3(x + c) + 2$ poteka skozi točko $A(5, 4)$. Število c je:

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) -1 (**D**) 0
(**E**) nič od navedenega

A5 Pravokotni trikotnik ima ploščino 24 cm^2, stranice trikotnika so v razmerju $0,24 : 0,32 : 0,4$. Obseg tega trikotnika je:

(**A**) 12 cm (**B**) 16 cm (**C**) 20 cm (**D**) 24 cm (**E**) 25 cm

A6 Stranico kocke a zmanjšamo za 50%. Kolikšen je volumen nove, zmanjšane kocke, v primerjavi s prvotnim?

(**A**) 50% prvotnega volumna (**B**) 25% prvotnega volumna
(**C**) $12,5\%$ prvotnega volumna (**D**) $6,25\%$ prvotnega volumna
(**E**) $7,5\%$ prvotnega volumna

B1 Natančno reši enačbo $2\ln(\sqrt{x}) - \ln(1-x) = 2$. *(6 točk)*

B2 Janez je postavil ograjo vrta pravokotne oblike, ki je ograjen s treh strani. Dolžina ograje je 60 m, ploščina tega pravokotnega vrta pa 352 m^2. Koliko merita stranici vrta, če je $a > b$?

(7 točk)

B3 Hlod v obliki valja obžagamo do največjega možnega bruna s presekom kvadrata. Koliko odstotkov je odpadkov?

(7 točk)

B4 Dani sta enačbi funkcij $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ in $g(x) = ax^2 + 1$, $a \in \mathbb{R}$. V koordinatni sistem nariši graf funkcije $g(x) = ax^2 + 1$ za $a = -1$ in natančno izračunaj presečišče funkcije $f(x)$ z $g(x)$.

(6 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

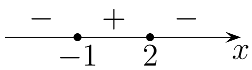
NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

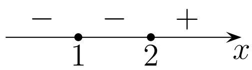
Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

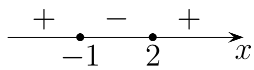
A1	A2	A3	A4	A5	A6

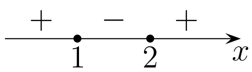
B1	B2	B3	B4

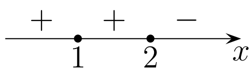
A1 Na kateri sliki je prikazan potek predznaka polinoma $p(x) = -x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 4x + 8$?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

A2 Asimptota funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer je $q(x) = 1 + 2x - 3x^2$ in $p(x) = x^2 - 4$, ima enačbo:

(A) $y = 0$ **(B)** $y = 1$ **(C)** $y = -\frac{1}{3}$ **(D)** $y = -3$ **(E)** $y = 3$

A3 Katere od navedenih vrednosti funkcija $f(x) = \cos x$ ne zavzame?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ **(C)** $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ **(E)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

A4 Premica odreže na ordinatni osi odsek -5, s pozitivno smerjo abscisne osi oklepa kot $45°$. Njena enačba je:

(A) $x = -5$ **(B)** $y = -x - 5$ **(C)** $y = x - 5$ **(D)** $y = -5x$
(E) nič od navedenega

A5 Dano je zaporedje
$a_1 = \sqrt{5}$
$a_2 = \sqrt{5\sqrt{5}}$
$a_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$
$a_4 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}.$
Peti člen tega zaporedja je enak:

(A) $5^{\frac{1}{32}}$ **(B)** $\sqrt[32]{5^{31}}$ **(C)** $5 \cdot \sqrt[32]{5}$ **(D)** $5^5\sqrt{5}$ **(E)** $5^{\frac{32}{31}}$

A6 Če seštejemo prvih 12 večkratnikov nekega števila, dobimo vsoto 1014. To so večkratniki števila:

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 12 **(E)** 13

B1 Dani sta funkciji $p(x) = x^3 + 2x - 3$ in $f(x) = -2x - 3$. Nariši grafa obeh funkcij v isti koordinatni sistem in določi njuno presečišče.

(7 točk)

B2 Reši neenačbo $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \geq 1 - \frac{x}{x^2-4}$. *(7 točk)*

B3 Pokaži, da velja $\left((\frac{1+\cos x}{\sin x})^2 + 1\right) : \frac{\cos x+1}{\sin^2 x} = 2$. *(6 točk)*

B4 Za kopanje vodnjaka plačamo za prvi meter izkopa 60 evrov, za vsak naslednji meter pa po 6 evrov več. Izračunaj, kolikšna je globina vodnjaka, če plačamo za izkop 870 evrov. Koliko plačamo za zadnji meter izkopa vodnjaka?

(6 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 30. marec 2011

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

Prvi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	B	B	A	A	E

A1. Naj bo prvotni ulomek $\frac{a}{b}$. Če povečamo števec za 5% in imenovalec za 20%, potem je novi ulomek $\frac{1{,}05a}{1{,}2b}$, kar je $0,875$ od $\frac{a}{b}$. Torej se novi ulomek zmanjša za $12,5\%$.

A2. Poenostavimo $6^3 = (2 \cdot 3)^3$. Tako dobimo $2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$. Da dobimo popoln kvadrat, moramo pomnožiti s $3 \cdot 5$, torej s 15.

A3. Ulomka $\frac{1}{6}$ in $\frac{1}{5}$ razširimo na skupni imenovalec. Dobimo $\frac{10}{60}$ in $\frac{12}{60}$. Ulomek, ki je med njima je $\frac{11}{60}$. Tako je iskano naravno število 11.

A4. Produkt pozitivnega in negativnega števila je negativen, produkt negativnega števila in števila 0 je 0, tako velja trditev A.

A5. Naj bo liho število $2n - 1$. Kvadrat tega števila je $4n^2 - 4n + 1$. Temu številu prištejemo 3 in dobimo $4n^2 - 4n + 1 + 3$, izpostavimo 4 in dobimo $4(n^2 - n + 1)$. Dobljeno število je večkratnik števila 4. Torej je število deljivo s 4.

A6. Enačbo uredimo $3ax = c - b$, delimo s $3a$ in dobimo rešitev $x = \frac{c-b}{3a}$.

Sklop B

B1. Zapišemo enačbo $\frac{x+\frac{1}{x}}{-x}=-1,04$. Upoštevamo, da je $-1,04=-\frac{26}{25}$. Vstavimo in preoblikujemo enačbo v npr. $x+\frac{1}{x}=\frac{26}{25}x$. Enačbo poenostavimo do oblike: $x^2-25=0$, razstavimo in dobimo rešitvi 5 in -5.

Zapis ali uporaba obratne vrednosti $\frac{1}{x}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{x+\frac{1}{x}}{-x}=-1,04$ .... 1 točka
Pretvorba decimalnega števila v ulomek $-1,04=-\frac{26}{25}$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe v npr. $x+\frac{1}{x}=\frac{26}{25}x$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $x^2-25=0$ ali $25=x^2$ .... 1 točka
Rešitvi 5 in -5 .... $1+1$ točka

B2. Posamezne izraze razstavimo: $24x^4-24x^3+6x^2=6x^2(4x^2-4x+1)=6x^2(2x-1)^2$, $64x^3-8=8(2x-1)(4x^2+2x+1)$ in $48x^2-12=12(4x^2-1)=12(2x-1)(2x+1)$. Ugotovimo, da je največji skupni delitelj $D=2(2x-1)$ in najmanjši skupni večkratnik $v=24x^2(2x-1)^2(2x+1)(4x^2+2x+1)$.

Razcep izraza $24x^4-24x^3+6x^2=6x^2(4x^2-4x+1)=6x^2(2x-1)^2$ .... 1 točka
Razcep izraza $64x^3-8=8(2x-1)(4x^2+2x+1)$ .... $1+1$ točka
Razcep izraza $48x^2-12=12(4x^2-1)=12(2x-1)(2x+1)$ .... 1 točka
Največji skupni delitelj $D=2(2x-1)$ .... 1^* točka
Najmanjši skupni večkratnik $v=24x^2(2x-1)^2(2x+1)(4x^2+2x+1)$ .... 1 točka

B3. Kvadriramo $(x+2)^2=x^2+4x+4$. Uredimo drugi člen izraza $(x-2)(x+2)=x^2-4$. Upoštevamo negativni predznak pred drugim členom in dobimo $x^2+4x+4-x^2+4-4x^2+\frac{2}{x}$. Uredimo $-4x^2+8+4x+\frac{2}{x}$. Vstavimo $x=\sqrt{2}$, dobimo $-4\sqrt{2}^2+8+4\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$. Racionaliziramo zadnji člen $\frac{2\sqrt{2}}{2}$. Dobimo rezultat $5\sqrt{2}$.

Kvadriranje $(x+2)^2=x^2+4x+4$ .... 1 točka
Ureditev drugega člena $(x-2)(x+2)=x^2-4$ .... 1 točka
Ureditev izraza $-4x^2+8+4x+\frac{2}{x}$ .... 1 točka
Vstavitev $x=\sqrt{2}$ .... 1 točka
Racionalizacija imenovalca .... 1 točka
Rešitev $5\sqrt{2}$ .... 1 točka

B4. Označimo število učencev z x in število klopi z y. Po besedilu naloge zapišemo enačbi $x=y+11$ in $\frac{x}{2}=y-5$. Rešimo sistem $x=y+11, x=2y-10$. Rešitev sistema je $x=32$ in $y=21$. V razredu je torej 21 klopi in 32 učencev.

Zapis enačbe $x=y+11$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{x}{2}=y-5$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1^*+1 točka
Rešitvi sistema $x=32$ in $y=21$ .... $1+1$ točka
Odgovor: V razredu je 21 klopi in 32 učencev .... 1 točka

Drugi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
D	A	C	A	E	A

A1. Pogoj, da bo graf sekal x os pri $x = 3$, je $0 = (2m + 3) \cdot 3 - (1 - 2m)$. V enačbi odpravimo oklepaje $0 = 6m + 9 - 1 + 2m$, jo uredimo $0 = 8m + 8$. Izračunamo, da je $m = -1$.

A2. Smerni koeficient premice, ki je vzporedna z abscisno osjo je $k = 0$. Torej je produkt vseh treh smernih koeficientov enak 0.

A3. Komplementarni kot kota α je $90° - \alpha$. Suplementarni kot kota α pa je $180° - \alpha$. Vsota teh dveh kotov je $90° - \alpha + 180° - \alpha$. Seštejemo $270° - 2\alpha$ in enačimo s 4α. Dobimo enačbo $4\alpha = 270° - 2\alpha$. Enačba ima rešitev $\alpha = 45°$.

A4. Iz razmerja ploščin podobnih trikotnikov, $S_1 : S_2 = 4 : 9$ razberemo razmerje istoležnih stranic teh dveh trikotnikov $a_1 : a_2 = 2 : 3$. Upoštevamo dolžino stranice manjšega trikotnika in jo uporabimo v sorazmerju $6 : a_2 = 2 : 3$. Razrešimo sorazmerje $2 \cdot a_2 = 6 \cdot 3$. Izrazimo $a_2 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Stranica trikotnika je dolga 9 cm.

A5. Izraz $(((a^{x+y})^{x-y})^{x^2+y^2})^{x^4+y^4}$ poenostavimo. Začnemo v notranjem oklepaju, kjer upoštevamo produkt vsote in razlike $((a^{x^2-y^2})^{x^2+y^2})^{x^4+y^4}$. Postopek ponovimo, saj tudi v naslednjem koraku uporabimo produkt vsote in razlike $(a^{x^4-y^4})^{x^4+y^4}$. Tudi v zadnjem koraku upoštevamo prejšnje pravilo in dobimo $a^{x^8-y^8}$.

A6. Periodično decimalno število $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Decimalno število $0,125$ zapišemo z okrajšanim ulomkom $\frac{1}{8}$. Tako lahko izraz $\sqrt[6]{0,125^{-0,\overline{6}}}$ zapišemo $((\frac{1}{8})^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{6}}$. Ulomek $\frac{1}{8}$ zapišemo s potenco in upoštevamo negativni eksponent. Dobimo $((2^3)^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{6}}$, eksponente pomnožimo oziroma pred tem ustrezno okrajšamo, tako dobimo $2^{\frac{1}{3}}$, kar je $\sqrt[3]{2}$.

Sklop B

B1. I. način

Ugotovimo, da je račun za telefon enak vrednosti linearne funkcije $f(x) = k \cdot x + n$, pri čemer je k cena minute pogovora, x naj pomeni število minut pogovora in n pomeni mesečno naročnino. Podani imamo dve vrednosti te funkcije: $f(75) = 15,45$ in $f(113) = 20,01$. Izračunamo $k = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{20,01-15,45}{113-75} = \frac{4,56}{38} = 0,12$. Upoštevamo $f(x_2) - f(x_1) = k \cdot (x_2 - x_1)$ ter vstavimo ustrezne podatke. Dobimo $f(x) = 0,12 \cdot x + 6,45$. n lahko izračunamo iz zveze $f(x) = l \cdot x + n$. Vstavimo podatke iz $f(75) = 15,45$ in dobi,o $15,45 = 0,12 \cdot 75$. Izračunamo $n = 6,45$. Torej minuta pogovora stane $0,12$ evra in mesečna naročnina $6,45$ evra.

I. način

Ugotovitev, da je račun za telefon enak vrednosti linearne funkcije .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $f(75) = 15,45$ in $f(113) = 20,01$ .... 1 točka
Izračuna $k = 0,12$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun $n = 6,45$ .... $1 + 1^*$ točka
Odgovor: Minuta pogovora stane $0,12$ evra in mesečna naročnina $6,45$ evra .... 1 točka

II. način

Sklepamo: V mesecu oktobru je Jana govorila 38 minut več in plačala $4,56$ evrov več. Torej 1 minuta pogovora stane $4,56 : 38 = 0,12$ evra. Upoštevamo še računa za september, pa dobimo mesečno naročnino $6,45$ evra.

Izračun razlike $20,01 - 15,45 = 4,56$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun razlike minut $113 - 75 = 38$ .... $1 + 1^*$ točka
Izračun cene 1 minute pogovora $4,56 : 38 = 0,12$ .... 1 točka
Izračun naročnine $20,01 - 113 \cdot 0,12 = 6,45$ .... 1 točka
Odgovor: Minuta pogovora stane $0,12$ evra in mesečna naročnina $6,45$ evra .... 1 točka
OPOMBA:Dijak, ki pride z logičnim razmišljanjem do pravilne rešitve in napravi preizkus, dobi vse možne točke.

B2. Iskana oddaljenost je dolžina daljice RM. Iz slike razberemo, da je: $|RM| = |RA| + |AM|$, kot $MDA = 50°$, kot $RBA = 40°$. Upoštevamo $\sin 50° = \frac{|MA|}{|AD|}$, iz česar izrazimo $|MA| = |AD| \cdot \sin 50°$. Izračunamo $|MA| = 2,298$ cm. Uporabimo še $\sin 40° = \frac{|RA|}{|BA|}$. Izrazimo $|RA| = |BA| \cdot \sin 40° = 4,5$ cm. Izračunamo še $|RM| = 2,298 + 4,5 = 6,8$ cm. .

Zapis $\sin 50° = \frac{|MA|}{|AD|}$ .... 1 točka
Izračun $|MA| = |AD| \cdot \sin 50°$ .... 1 točka
Izračun $|MA| = 2,298$ cm .... 1 točka
Zapis $\sin 40° = \frac{|RA|}{|BA|}$ .... 1 točka
Izračun $|RA| = |BA| \cdot \sin 40° = 4,5$ cm .... 1 točka
Izračun $|RM| = 2,298 + 4,5 = 6,8$ cm .... 1 točka

B3. Skico dopolnimo s točkami A, B, C, D in E ter ugotovimo, da sta trikotnika ABC in CDE podobna. Zapišemo ustrezno razmerje istoležnih stranic $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|DE|}$. Vstavimo $\frac{6}{4} = \frac{10}{x-10}$ in izračunamo $6x - 60 = 40$, torej je $x = \frac{50}{3}$.

Ugotovitev, da sta trikotnika ABC in CDE podobna .... 1 točka
Upoštevanje izreka, po katerem je kvocient istoležnih stranic konstanten .... 1 točka
Zapis $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|DE|}$ .... 1 točka
Zapis $\frac{6}{4} = \frac{10}{x-10}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $6x - 60 = 40$ .... 1 točka
Rezultat $x = \frac{50}{3}$ .... 1 točka

B4. Izraz pretvorimo na potence z enako osnovo $3^{2n-1} \cdot (2^2)^{n+1} + (3^2)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} + (3 \cdot 2)^{2n-1}$, uredimo $3^{2n-1} \cdot 2^{2(n+1)} + 3^{2(n+1)} \cdot 2^{2n-1} + 3^{2n-1} \cdot 2^{2n-1}$. Izpostavimo skupni faktor $3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}$ in dobimo $3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}(2^3 + 3^3 + 1) = 6^{2n-1} \cdot 36$. Število 36 zapišemo s potenco 6^2 in uredimo $6^{2n-1} \cdot 6^2 = 6^{2n+1}$.

Preoblikovanje prvega člena $3^{2n-1} \cdot 4^{n+1} = 3^{2n-1} \cdot 2^{2(n+1)}$ .... 1 točka
Preoblikovanje drugega člena $9^{n+1} \cdot 2^{2n-1} = 3^{2(n+1)} \cdot 2^{2n-1}$ .... 1 točka
Preoblikovanje tretjega člena $6^{2n-1} = (3 \cdot 2)^{2n-1} = 3^{2n-1} \cdot 2^{2n-1}$ .... 1 točka
Izpostavljen skupni faktor $3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}(2^3 + 3^3 + 1)$ .... $1 + 1$ točka
Preoblikovanje zapisa $6^{2n-1} \cdot 6^2 = 6^{2n-1} \cdot 36$ .... 1 točka
Rezultat 6^{2n+1} .... 1 točka

Tretji letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	D	C	A	D	C

A1. Če je $a < 0$, je graf kvadratne funkcije - parabola konkavna(v temenu ima maksimum). Če je $c < 0$, grafa seka os y na negativni polosi. Ker je $b < 0$, je abscisa temena $p = -\frac{b}{2a}$ negativna. Velja slika A.

A2. Zapisana kvadratna funkcija je pozitivna, če je $D < 0$. Veljati mora $(k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, torej $k^2 - 2k - 3 < 0$. Rešimo neneačbo, tako da poiščemo rešitvi enačbe $k^2 - 2k - 3 = 0$, razstavimo $(k-3)(k+1) = 0$, odčitamo $k_1 = -1$ in $k_2 = 3$. Preverimo predznake na številski premici in dobimo rešitev D.

A3. Razmišljamo: ko list prepognemo enkrat, dobimo 2 lista, ob dveh prepogibih dobimo $4 = 2^2$ liste, ob treh $8 = 2^3$ listov,ob n prepogibih 2^n listov. Zloženka mora imeti v n prepogibih 512 listov, torej $2^n = 512$. Zapišemo s potencami z enakimi osnovami $2^n = 2^9$. n = 9 List moramo prepogniti devetkrat.

A4. Vstavimo točko $A(5,2)$ in dobimo $2 = \log_3(5+c) + 2$. Upoštevamo definicijo logaritma $3^2 = 5 + c$. Izračunamo $c = 4$.

A5. Upoštevamo, da je $a = 0,24x, b = 0,32x$ in $c = 0,4x$. Ploščina trikotnika je $\frac{a \cdot b}{2} = 24$. Vstavimo $0,24x \cdot 0,32x = 48$, iz česar izračunamo $x = 5$. Izračunamo $a = 6$ cm,$b = 8$ cm in $c = 10$ cm, obseg je torej 24 cm.

A6. Volumen pomanjšane kocke V_1 izrazimo s prvotnim volumnom $V = a^3$. Tako velja $V_1 = (\frac{a}{2})^3 = \frac{1}{8}V = 12,5\%V$.

Sklop B

B1. Z uporabo pravil za računanje z logaritmi preoblikujemo dano logaritemsko enačbo v $\ln(\frac{x}{1-x}) = 2$. Iz definicije logaritma izhaja $\frac{x}{1-x} = e^2$. Odpravimo ulomke in iz dobljene enačbe izrazimo x.

Preoblikovanje enačbe v $\ln x - \ln(1-x) = 2$ .... 1 točka
Zapis $\ln(\frac{x}{1-x}) = 2$ .... 1 točka
Zapis $\frac{x}{1-x} = e^2$ .... 1 točka
Odprava ulomka $x = e^2 - xe^2$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $x(1+e^2) = e^2$ .... 1 točka
Rešitev $x = \frac{e^2}{1+e^2}$ .... 1 točka

B2. Iz podanih podatkov zapišemo zvezi $2a + b = 60$ in $a \cdot b = 352$. Rešimo nastali sistem dveh enačb z dvema neznankama. Upoštevamo $a > b$ in izberemo ustrezno rešitev $a = 22$ in $b = 16$.

Zapis zveze $2a + b = 60$ in $a \cdot b = 352$ .... $1 + 1$ točka
Reševanje sistema .... 1 točka
Izračun $a_1 = 22$ in $a_2 = 8$ .... $1 + 1$ točka

Izračun $b_1 = 16$ in $b_2 = 44$ .... 1 točka
Odgovor: Stranici merita 22 in 16 m. .... 1 točka

B3. Sklepamo, da je diagonala kvadrata enaka premeru kroga. Torej $r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tako velja $a = r\sqrt{2}$. Razmerje prostornin kvadra in valja je $\frac{V_k}{V_v} = \frac{a^2 v}{\pi r^2 v}$. Upoštevamo, da imata telesi enaki višini in ulomek okrajšamo. Upoštevamo še $a = r\sqrt{2}$, kar vstavimo v okrajšani ulomek. Dobimo $\frac{(r\sqrt{2})^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} = 0,637$. Tako velja $V_k = 0,637 V_v$. Torej predstavlja volumen kvadra $63,7\%$ volumna valja. Odpade torej $36,3\%$ ostružkov.

Ugotovljena ali uporabljena zveza $2r = d$ .... 1 točka
Zapisana ali uporabljena zveza $a = r\sqrt{2}$ .... 1 točka
Upoštevan volumen kvadra $V_k = a^2 v$ .... 1 točka
Upoštevan volumen valja $V_v = \pi r^2 v$ .... 1 točka
Zapis razmerja volumnov $\frac{V_k}{V_v} = \frac{2}{\pi} = 0,64$ .... 1 točka
Upoštevanje enakih višin teles (primerno krajšanje) .... 1 točka
Zapisan odgovor: Odpade torej $36,3\%$ ostružkov. .... 1 točka

B4. Zapišemo funkcijo $g(x) = -x^2 + 1$. Predpisa obeh funkcij enačimo $\frac{-2}{x^2} = -x^2 + 1$. Odpravimo ulomek $x^4 - x^2 - 2 = 0$ in enačbo uredimo $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Enačbo razstavimo po Vietovem pravilu $(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$. $(x^2 - 2)$ razstavimo na $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Odčitamo abscisi presečišča $x_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$.

Zapis $g(x) = -x^2 + 1$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{-2}{x^2} = -x^2 + 1$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $x^4 - x^2 - 2 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi $x_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$ .... 1 točka
Izračunani ničli in teme .... 1 točka
Narisan graf .... 1 točka
ALI za zadnji dve točki
Narisan graf $f(x) = x^2$ .... 1 točka
Narisan graf $f(x) = x^2 + 1$ .... 1 točka

Četrti letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	A	A	B	E

A1. Polinom ima dve realni ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 2$, obe sta lihi. Določimo predznake na intervalih, ki jih omejujeta ničli. Pravilna rešitev je A.

A2. Racionalna funkcija ima predpis $f(x) = \frac{x^2-4}{1+2x-3x^2}$. Stopnji števca in imenovalca sta enaki, zato je asimptota enaka količniku vodilnih koeficientov in je $y = -\frac{1}{3}$.

A3. Zaloga vrednosti za dano funkcijo je $[-1, 1]$. Preverimo vrednosti pri ponujenih rešitvah in ugotovimo, da vrednost pri A presega vrednost 1.

A4. Odsek na ordinatni osi pomeni, da je $n = -5$. Naklonski kot premice je $\tan\alpha = k$, torej je $k = \tan 45°$, kar pomeni, da je $k = 1$. Enačba premice je torej $y = x - 5$.

A5. Peti člen ima zapis $a_5 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}$, kar lahko zapišemo $\sqrt[32]{5^{16}\cdot 5^8\cdot 5^4\cdot 5^2\cdot 5}$. Skrčimo potence v korenu $\sqrt[32]{5^{31}}$ ter zapišemo s potenco $5^{\frac{31}{32}}$.

A6. Sklepamo, da sta a_1 in d enaka, ker govorimo o večkratniku istega števila. Uporabimo obrazec za vsoto $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-)d)$. Vstavimo $1014 = \frac{12}{2}(2\cdot d + 11d)$ iz česar izračunamo $d = 13$.

Sklop B

B1. Za polinom $p(x) = x^3 + 2x - 3$ določimo ničlo in jo preverimo po Hornerju. Količnik, ki ga razberemo iz Hornerja je $x^2 + x + 3$. Diskriminanta tega je negativna, kar pomeni, da ima polinom eno realno ničlo, ki je $x = 1$. Izračunamo začetno vrednost oziroma presečišče z ordinatno osjo $(0, -3)$. Upoštevamo predznake in narišemo graf. Graf linearne funkcije narišemo z upoštevanjem dveh točk, npr. začetne vrednosti $(0, -3)$ in še ene poljubne točke. Odčitamo presečišče, ki je $(0, -3)$.

Določitev ničle polinoma $x = 1$ .... 1 točka
Uporaba Hornerjevega algoritma .... 1 točka
Izračun presečišča grafa polinom z ordinatno osjo $(0, -3)$ .... 1 točka
Narisan približen graf polinoma .... 1 točka
Izračunani dve točki za graf premice ali upoštevana k in n .... 1 točka
Narisan graf premice .... 1 točka
Zapis presečišča $(0, -3)$ .... 1 točka

B2. Neenačbo uredimo tako, da neenačimo z 0. Dobimo $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - 1 + \frac{x}{x^2-4} \geq 0$. Poiščemo skupni imenovalec, ki je $x^2 - 4$. Razširimo števce ter neenačbo ustrezno uredimo $\frac{x+2+x-2-x^2+4+x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$. Skrčimo števec $\frac{-x^2+3x+4}{(x-2)(x+2)} \geq 0$. Določimo ničli iz $-x^2 + 3x + 4 = 0$, ter pola. Ničli sta $x_1 = 4$ in $x_2 = 1$, pola sta $x_1 = 2, x_2 = -2$. Uredimo predznake in odčitamo rešitev $x \in (-2, 1] \cup (2, 4]$.

Neenačenje z $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - 1 + \frac{x}{x^2-4} \geq 0$ .... 1 točka

Razširitev števcev $x+2+x-2-x^2+4+x$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $\frac{-(x^2-3x-4)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ .... 1 točka
Določitev ničel $x_1 = 4$ in $x_2 = 1$ .... 1 točka
Določitev polov $x_1 = 2, x_2 = -2$ .... 1 točka
Ureditev predznakov .... 1 točka
Zapisana rešitev $x \in (-2, 1] \cup (2, 4]$ .... 1 točka

B3. Kvadriramo ulomek $\frac{1+\cos x}{\sin x}$ in dobimo $\frac{1+2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$. Določimo skupni imenovalec $\frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}$. V števcu seštejemo $\frac{2+2\cos x}{\sin^2 x}$. V števcu izpostavimo skupni faktor in deljenje spremenimo v množenje $\frac{2(1+\cos x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x+1}$. Ulomka okrajšamo in dobimo 2.

Kvadriranje izraza $(\frac{1+\cos x}{\sin x})^2 = \frac{1+2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
Razširitev na skupni imenovalec $\frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
Pravilno seštevanje v števcu $\frac{2+2\cos x}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
Izpostavljen skupni faktor $\frac{2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$ .... 1 točka
Preoblikovanje deljenja v množenje $\frac{2(1+\cos x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x+1}$ .... 1 točka
Pravilno krajšanje in rezultat 2 .... 1 točka

B4. Uporabimo obrazec $s_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-)d)$ in dobimo $870 = \frac{n}{2}(120+(n-1)6)$. Enačbo uredimo, krajšamo s 3 in dobimo $n^2+19n-290=0$. Enačbo razstavimo $(n-10)(n+29)=0$. Ustrezna rešitev enačbe je $n=10$, kar pomeni, da je globina vodnjaka 10 m. Izračunamo še deseti člen aritmetičnega zaporedja za znesek zadnjega metra izkopa $a_{10} = a_1 + 9d$ in dobimo $a_{10} = 60+54 = 114$. Za zadnji meter izkopa plačamo 114 evrov.

Zapis enakosti $870 = \frac{n}{2}(120+(n-1)6)$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $n^2+19n-290=0$ .... 1 točka
Reševanje enačbe .... 1* točka
Rešitev $n=10$ .... 1 točka
Izračun desetega člena zaporedja $a_{10} = 60+54 = 114$ .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka
OPOMBA: Če pravilno izračuna globino vodnjaka brez uporabe formul in brez odgovora dobi 3 točke.