

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. in 2. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Kateri izmed številskih izrazov ima vrednost 2019?

- (A)  $2019^{-1}$  (B)  $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$  (C)  $(-1)^{2019}$   
(D)  $3 \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$  (E)  $2019^{2019}$

A2. Pri kateri pretvorbi se je Julija zmotila?

- (A)  $24 \text{ dm} = 2,4 \text{ m}$  (B)  $12^\circ 50' = 12,5^\circ$  (C)  $0,4 \text{ l} = 4 \text{ dl}$   
(D)  $3,6 \text{ m}^2 = 36 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$  (E)  $130 \text{ cm} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ km}$

A3. Kateri od spodnjih izrazov ima za  $x = 5$  nenegativno vrednost?

- (A)  $-x^3 + x$  (B)  $x^3 - x$  (C)  $-x^2 + x + 12$  (D)  $-x^2 + 17$  (E)  $2x - 20$

A4. Aritmetična sredina števil 2, 4, 5, 8,  $x$ , 15, 20 je  $x$ . Vrednost  $x$  je:

- (A)  $-9$  (B)  $9$  (C)  $10$  (D)  $12$  (E)  $13$

A5. V drevoredu imamo nasajenih 80 dreves. Gozdar Matic označi vsako tretje drevo, gozdar Jure pa vsako peto drevo. Podrli bodo tista drevesa, ki so označena od obeh gozdarjev. Koliko dreves bodo podrli?

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 26 (E) 30

A6. Delce plastike velikosti 300 mikrometrov do 5 milimetrov imenujemo mikroplastika. Katera zapisana velikost ni v tem intervalu?

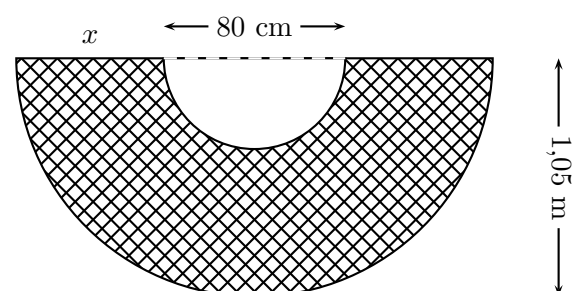
- (A)  $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  (B)  $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  (C)  $4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$   
(D)  $4 \text{ mm}$  (E)  $4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$

A7. Tri cela števila  $a, b, c$  zadoščajo enačbi  $4^a \cdot 7^b \cdot 12^c = 14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$ . Poišči števila  $a, b$  in  $c$ .

- (A)  $a = 6, b = 3, c = 8$  (B)  $a = 6, b = 3, c = 9$  (C)  $a = 6, b = 10, c = 11$   
(D)  $a = 6, b = 11, c = 10$  (E)  $a = 11, b = 6, c = 10$

A8. Koliko je dolg rob cvetlične gredice, ki je na sliki označen z  $x$ ?

- (A) 15 cm (B) 25 cm (C) 35 cm  
(D) 45 cm (E) 65 cm



- B1.** Najem apartmaja stane dnevno 234 evrov. Na sedemdnevno smučanje se je v ta apartma najprej odpravljalo 9 prijateljev. Znesek bi razdelili na enake dele.
- A. Koliko bi plačal vsak od devetih prijateljev za tedenski najem apartmaja?
  - B. Trije prijatelji so zaradi bolezni ostali doma. Koliko odstotkov več denarja je zato moral plačati vsak izmed prijateljev, ki je bil v apartmaju?
  - C. Prijatelji so kuhali krompir v loncu s premerom 28 cm. Ko je nekaj vode izparelo, so dolili toliko vode, da se je gladina le-te dvignila za 2 cm. Koliko decilitrov vode so dolili?
  - D. Na koliko različnih načinov so lahko pripravili pogrinjek s krožnikom, kozarcem in servieto, če so imeli na voljo 3 različne komplete krožnikov, 5 različnih paketov serviet in 2 različna kompleta kozarcev?

**B2.** Dan je izraz  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4}$ .

- A. Izračunaj vrednost izraza za  $x = 5$ .
- B. Določi tak  $x$ , da bo vrednost izraza enaka 4.
- C. Določi tak  $x$ , da bo vrednost izraza vsaj 2.
- D. Poišči tako najmanjše naravno število  $x$ , da bo vrednost izraza celo število.

- B3.** V viličarjevem rezervoarju je v začetku 62 litrov goriva. Viličar porabi vsako uro 15 litrov goriva.
- A. Z viličarjem so 3 ure in 20 minut prelagali palete. Koliko goriva je po tem ostalo v rezervoarju?
  - B. Rezervoar ima obliko kvadra z merami 0,7 m, 30 cm in 400 mm. Izračunajte njegovo prostornino v  $\text{dm}^3$ .
  - C. Zjutraj imajo v skladišču 635 palet izdelkov. Z viličarjem vsakih štiriindvajset minut na tovornjak naložijo in odpeljejo osemnajst palet. Koliko palet izdelkov ostane v skladišču ob koncu osemurnega delovnika?

### Naloga za 3. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Kateri od številskih izrazov ima vrednost 2019?

- (A)  $2019^{-1}$                       (B)  $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$                       (C)  $(-1)^{2019}$   
(D)  $3 \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$                       (E)  $2019^{2019}$

A2. Katera trditev je napačna?

- (A)  $2x^2 - 32 = 2(x - 4)(x + 4)$   
(B) Premica  $y = x + 1$  seka abscisno os v točki  $A(-1, 0)$ .  
(C) Premici z enačbama  $y = 2x + 2$  in  $2x - y + 4 = 0$  sta vzporedni.  
(D)  $\sqrt{17^2 - 15^2} = 2^3$   
(E)  $2^0 + (-1)^0 = 0$

A3. Aritmetična sredina števil 2, 4, 5, 8,  $x$ , 15, 20 je  $x$ . Vrednost  $x$  je:

- (A) -9                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 12                      (E) 13

A4. V drevoredu imamo nasajenih 80 dreves. Gozdar Matic označi vsako tretje drevo, gozdar Jure pa vsako peto drevo. Podrli bodo tista drevesa, ki so označena od obeh gozdarjev. Koliko jih bodo podrli?

- (A) 5                      (B) 10                      (C) 15                      (D) 26                      (E) 30

A5. Delce plastike velikosti 300 mikrometrov do 5 milimetrov imenujemo mikroplastika. Katera zapisana velikost ni v tem intervalu?

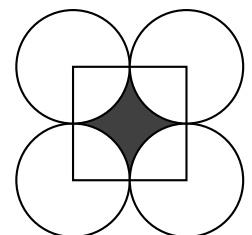
- (A)  $4 \cdot 10^{-4}$  m                      (B)  $4 \cdot 10^{-6}$  m                      (C)  $4 \cdot 10^{-3}$  m                      (D) 4 mm                      (E)  $4 \cdot 10^{-2}$  cm

A6. Tri cela števila  $a, b, c$  zadoščajo enačbi  $4^a \cdot 7^b \cdot 12^c = 14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$ . Poišči števila  $a, b$  in  $c$ .

- (A)  $a = 6, b = 3, c = 8$                       (B)  $a = 6, b = 3, c = 9$                       (C)  $a = 6, b = 10, c = 11$   
(D)  $a = 6, b = 11, c = 10$                       (E)  $a = 11, b = 6, c = 10$

A7. Stranica kvadrata je dolga 6 cm. V vsakem oglišču kvadrata narišemo krožnico s polmerom 3 cm (glej sliko). Ploščina osenčenega lika znaša  $x \cdot (4 - \pi)$  cm<sup>2</sup>. Vrednost  $x$  je:

- (A) 3                      (B) 6                      (C) 9                      (D) 36                      (E) 40



A8. Katera izmed navedenih kvadratnih enačb ima dve pozitivni rešitvi?

- (A)  $x^2 + 2x - 8 = 0$                       (B)  $x^2 + 5x + 6 = 0$                       (C)  $x^2 + x - 2 = 0$   
(D)  $x^2 - 5x + 6 = 0$                       (E)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

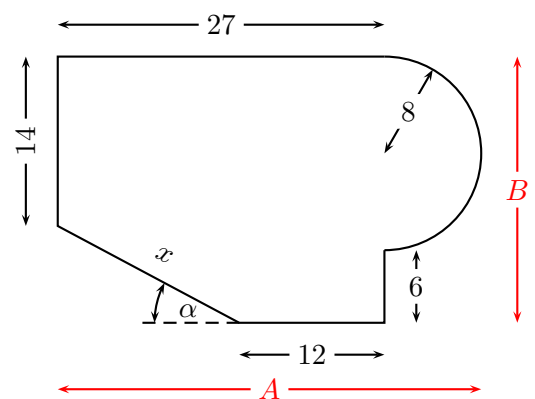
- B1.** Najem apartmaja stane dnevno 234 evrov. Na sedemdnevno smučanje se je v ta apartma najprej odpravljalo 9 prijateljev. Znesek bi razdelili na enake dele.
- Koliko bi plačal vsak od devetih prijateljev za tedenski najem apartmaja?
  - Trije prijatelji so zaradi bolezni ostali doma. Koliko odstotkov več denarja je zato moral plačati vsak izmed prijateljev, ki je bil v apartmaju?
  - Prijatelji so kuhali krompir v loncu s premerom 28 cm. Ko je nekaj vode izparelo, so dolili toliko vode, da se je gladina le-te dvignila za 2 cm. Koliko decilitrov vode so dolili?
  - Na koliko različnih načinov so lahko pripravili pogrinjek s krožnikom, kozarcem in servieto, če so imeli na voljo 3 različne komplete krožnikov, 5 različnih paketov serviet in 2 različna kompleta kozarcev?

**B2.** Dan je izraz  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4}$ .

- Izračunaj vrednost izraza za  $x = 5$ .
- Določi tak  $x$ , da bo vrednost izraza enaka 4.
- Določi tak  $x$ , da bo vrednost izraza vsaj 2.
- Poišči tako najmanjše naravno število  $x$ , da bo vrednost izraza celo število.

**B3.** Slika prikazuje obliko in mere kovinske ploščice v milimetrih.

- V sliko ploščice vrišite eno daljico s krajiščem v enem izmed oglišč ploščice tako, da nastane trapez. Poiščite vse rešitve.
- Koliko mm je dolga zunanja mera  $A$ ?
- Koliko mm je dolga zunanja mera  $B$ ?
- Izračunajte dolžino poševnega roba  $x$ .
- Pod kolikšnim kotom  $\alpha$  odrežemo poševni rob? Rezultat zapišite v stopinjah na dve decimalki natančno.



### Rešitve nalog in točkovnik za 1. in 2. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z  $-0,5$  točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	B	B	A	B	D	E

- A1.** Vrednost 2019 ima številski izraz  $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ .
- A2.** Julija se je zmotila pri pretvorbi  $12^\circ 50' = 12,5^\circ$ , saj velja  $12,5^\circ = 12^\circ 30'$ .
- A3.** Za  $x = 5$  ima nenegativno vrednost izraz  $x^3 - x$ , in sicer  $x^3 - x = 5^3 - 5 = 125 - 5 = 120$ .
- A4.** Zapišemo enačbo  $\frac{2+4+5+8+x+15+20}{7} = x$ , ki ima rešitev  $x = 9$ .
- A5.** Matic označi drevesa: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., Jure pa 5, 10, 15, 20, .... Podrli bodo 15., 30., 45., 60. in 75. drevo, torej 5 dreves.
- A6.** Mikroplastika je velikosti od 0,3 mm do 5 mm. V tem intervalu se ne nahaja  $4 \cdot 10^{-6}$  m.
- A7.** Zmnožek  $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$  zapišemo s prafaktorji in nato z željenimi osnovami:  $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5 = 2^{11} \cdot 7^{11} \cdot 2^{16} \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = 4^6 \cdot 7^{11} \cdot 12^{10}$ .
- A8.** Na sliki je polovica kolobarja. Razlika med zunanjim in notranjim polmerom kolobarja je  $1,05 - 0,4 = 0,65$  m, kar predstavlja rob  $x$ .

## DALJŠE NALOGE

**B1.** Za sedemdnevni najem apartmaja bi vsak od devetih prijateljev plačal  $1639 \div 9 = 182$  evrov.

Ker si stroške razdeli le šest prijateljev, vsak plača  $1639 \div 6 = 273$  evrov, kar je za 50 % več.

Prostornina dolite vode je  $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 12^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 1230,9 \text{ cm}^3 = 12,3 \text{ dl}$ .

Prijatelji lahko pripravijo pogrinjek na  $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$  različnih načinov.

- A. Vsak od devetih prijateljev bi plačal 182 evrov. .... **1 t**
- B. Vsak je plačal 273 evrov, ..... **1 t**  
kar je 50 % več. .... **1 t**
- C. Izračunana prostornina dolite vode  $V = 1230,9 \text{ cm}^3$  ..... **1 t**  
oziroma 12,3 dl. .... **1 t**
- D. Izračunano število različnih načinov postavitve pogrinjka: 30. .... **2 t**

**B2.** Za  $x = 5$  je vrednost izraza  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 2 - \frac{5-2}{5} + \frac{1+5}{4} = \frac{29}{10}$ .

Zapišemo enačbo  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 4$ . Rešitev enačbe je  $x = 27$ .

Zapišemo neenačbo  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} \geq 2$ . Rešitev neenačbe je  $x \geq -13$ .

Poenostavimo izraz  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = \frac{x+53}{20}$ . Najmanjše naravno število  $x$ , za katerega bo vrednost izraza celo število, je  $x = 7$ .

- A. Izračunana vrednost izraza  $\frac{29}{10}$  ..... **2 t**
- B. Reševanje ..... **1 t**  
in rešitev enačbe  $x = 27$ . .... **1 t**
- C. Reševanje ..... **1 t**  
in rešitev neenačbe  $x \geq -13$ . .... **1 t**
- D. Izračunano najmanjše naravno število  $x$ , da je vrednost izraza celo število:  $x = 7$ .  
**1 t**

**B3.** Prostornina rezervoarja je  $V = abc = (7 \cdot 3 \cdot 4) \text{ dm}^3 = 84 \text{ dm}^3$ .

V treh urah in 20 minutah viličar porabi  $3 \cdot 15 + 5 = 50$  litrov goriva. V rezervoarju ostane 12 litrov goriva.

Z viličarjem vsakih 24 min = 0,4 h naložijo 18 palet, kar pomeni, da v 8 h naložijo 360 palet. V skladišču ostane 275 palet.

- A. Izračunana poraba goriva v 3 urah in 20 minutah: 50 l. .... **1 t**  
Izračunana količina goriva, ki ostane v rezervoarju: 12 l. .... **1 t**
- B. Izračun prostornine v katerikoli prostorninski enoti ..... **1 t**  
in rezultat  $V = 84 \text{ dm}^3$ . .... **2 t**
- C. Izračunano število palet, ki jih naložijo v 8 urah: 360. .... **1 t**  
Izračunano število palet, ki ostanejo v skladišču: 275. .... **1 t**

### Rešitve nalog in točkovnik za 3. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki

- smiselno upošteva besedilo naloge,
- vodi k rešitvi problema,
- je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z  $-0,5$  točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	E	B	A	B	D	C	D

- A1.** Vrednost 2019 ima številski izraz  $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ .
- A2.** Napačna je trditev  $2^0 + (-1)^0 = 0$ , saj je  $2^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$ .
- A3.** Zapišemo enačbo  $\frac{2+4+5+8+x+15+20}{7} = x$ , ki ima rešitev  $x = 9$ .
- A4.** Matic označi drevesa: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., Jure pa 5, 10, 15, 20, ... Podrli bodo 15., 30., 45., 60. in 75. drevo, torej 5 dreves.
- A5.** Mikroplastika je velikosti od 0,3 mm do 5 mm. V tem intervalu se ne nahaja  $4 \cdot 10^{-6}$  m.
- A6.** Zmnožek  $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$  zapišemo s prafaktorji in nato z željenimi osnovami:  $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5 = 2^{11} \cdot 7^{11} \cdot 2^{16} \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = 4^6 \cdot 7^{11} \cdot 12^{10}$ .
- A7.** Ploščina osenčenega lika predstavlja razliko med ploščino kvadrata s stranico dolžine  $a = 6$  cm in ploščino kroga s polmerom dolžine  $r = 3$  cm in znaša  $S = a^2 - \pi r^2 = 36 - \pi \cdot 9 = 9 \cdot (4 - \pi)$  cm<sup>2</sup>. Faktor  $x = 9$ .
- A8.** Enačba  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0$  ima dve pozitivni rešitvi 2 in 3.



## DALJŠE NALOGE

**B1.** Za sedemdnevni najem apartmaja bi vsak od devetih prijateljev plačal  $1639 \div 9 = 182$  evrov.

Ker si stroške razdeli le šest prijateljev, vsak plača  $1639 \div 6 = 273$  evrov, kar je za 50 % več.

Prostornina dolite vode je  $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 12^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 1230,9 \text{ cm}^3 = 12,3 \text{ dl}$ .

Prijatelji lahko pripravijo pogrinjek na  $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$  različnih načinov.

- A. Vsak od devetih prijateljev bi plačal 182 evrov. .... 1 t
- B. Vsak je plačal 273 evrov, ..... 1 t  
kar je 50 % več. .... 1 t
- C. Izračunana prostornina dolite vode  $V = 1230,9 \text{ cm}^3$  ..... 1 t  
oziroma 12,3 dl. .... 1 t
- D. Izračunano število različnih načinov postavitve pogrinjka: 30. .... 2 t

**B2.** Za  $x = 5$  je vrednost izraza  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 2 - \frac{5-2}{5} + \frac{1+5}{4} = \frac{29}{10}$ .

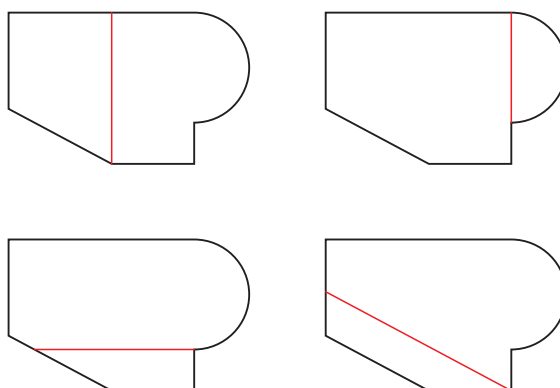
Zapišemo enačbo  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 4$ . Rešitev enačbe je  $x = 27$ .

Zapišemo neenačbo  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} \geq 2$ . Rešitev neenačbe je  $x \geq -13$ .

Poenostavimo izraz  $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = \frac{x+53}{20}$ . Najmanjše naravno število  $x$ , za katerega bo vrednost izraza celo število, je  $x = 7$ .

- A. Izračunana vrednost izraza  $\frac{29}{10}$  ..... 2 t
- B. Reševanje ..... 1 t  
in rešitev enačbe  $x = 27$ . .... 1 t
- C. Reševanje ..... 1 t  
in rešitev neenačbe  $x \geq -13$ . .... 1 t
- D. Izračunano najmanjše naravno število  $x$ , da je vrednost izraza celo število:  $x = 7$ .  
1 t

**B3.** Da nastane trapez, narišemo eno daljico tako, kot kažejo slike.



Zunanja mera  $A$  je dolga  $A = 27 + 8 = 35 \text{ mm}$ .

Zunanja mera  $B$  je dolga  $B = 8 + 8 + 6 = 22 \text{ mm}$ .

Poševni rob  $x$  predstavlja dolžino hipotenuze pravokotnega trikotnika s katetama

dolžin  $k_1 = 22 - 14 = 8$  mm in  $k_2 = 27 - 12 = 15$  mm. Dolžina hipotenuze  $x = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$  mm.

Iskani kot  $\alpha$  izračunamo z uporabo kotne funkcije, ki definira razmerje med dolžinama katet v pravokotnem trikotniku iz prejšnje točke:  $\tan\alpha = \frac{k_1}{k_2} = \frac{8}{15}$ . Dobimo  $\alpha = 28,07^\circ$ .

- A. Narisana daljica. .... **1 t**
  - B. Izračunana dolžina zunanje mere  $A = 35$  mm. .... **1 t**
  - C. Izračunana dolžina zunanje mere  $B = 22$  mm. .... **1 t**
  - D. Izračunana dolžina poševnega roba  $x = 17$  mm. .... **2 t**
  - E. Izračunana velikost kota  $\alpha = 28,07^\circ$ . .... **2 t**
- Op.: Če kot ni zapisan na dve decimalki, se odbije 1 točka.