

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	

Za reševanje imaš na voljo 90 minut. Odgovore zapiši v gornjo preglednico. Za vsak pravilen odgovor dobiš toliko točk, kot je naloga vredna. Za vsak nepravilen odgovor ti odštejemo četrtnino točk, kot je naloga vredna. Če pa pušiš polje v preglednici prazno, dobiš 0 točk. Da bi se izognili negativnemu končnemu dosežku, ti priznamo začetnih 24 točk.

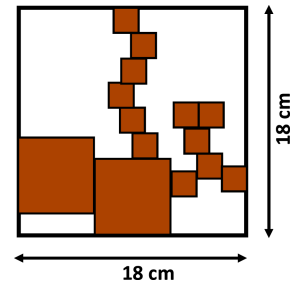
NALOGE, VREDNE 3 TOČKE

1. Označimo $[n] = n!^n$. Koliko je vrednost izraza $[[2]]$?

- (A) 2^8 (B) $2^{12}3^4$ (C) 2^33^1 (D) 2^83^2 (E) 2^{12}

2. V kvadratni škatli velikosti 18 cm \times 18 cm so čokolade 2 velikosti, vse čokolade imajo obliko kvadrata. Lenart je pojedel nekaj čokolad, ostale pa razporedil po škatli (glej sliko). Koliko centimetrov je dolžina stranice manjše čokolade?

- (A) 1.7 (B) 1.9 (C) 2.1 (D) 2.2
(E) Nobena od predhodnih dolžin.

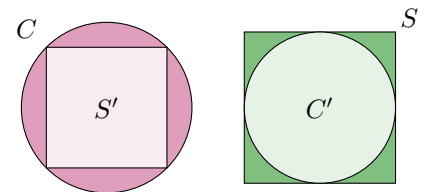


3. Katera od spodnjih vrednosti za neznanko x je rešitev enačbe $2^{2021}x^2 - (x + 1)^{1012} = 2^{2021}$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) Nobena od predhodnih.

4. Krog C in kvadrat S imata enako ploščino. Kvadrat S' je včrtan v krog C , krog C' pa je včrtan v kvadrat S . Kolikšno je razmerje med ploščinama kvadrata S' in kroga C' ?

- (A) 1 : 1 (B) 4 : π (C) 8 : π^2 (D) 1 : 2 (E) $2\sqrt{2} : \pi$



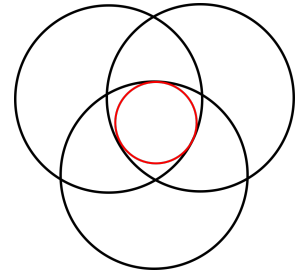
5. Označimo $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ in $B = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$. Katera od spodnjih enakosti je pravilna?

- (A) $2^B = A^2$ (B) $AB = 2^{\sqrt{2}}$ (C) $B = A^2$ (D) $B^2 = 2^A$ (E) $A + B = 3\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

6. Matej, Matija in Mitja so prijatelji. Njihove starosti v naraščajočem vrstnem redu so 12, 14 in 16 let. Vsak od njih ima 1 sestro, imena njihovih sester po abecednem vrstnem redu pa so Lana, Lea in Lina. Mitja in njegova sestra sta vsak zase stara več kot 15 let. 8-letna Lina ima brata, ki je 4 leta starejši od nje. Lana ni Mitjeva sestra. Katera od spodnjih izjav zagotovo ni pravilna?

- (A) Matej je star 12 let. (B) Matija je star 14 let. (C) Lanin brat je star 14 let.
(D) Lea je Matijeva sestra. (E) Linin brat je star 12 let.

7. Nik je narisal 3 enake krožnice s polmerom 1, vsaka od teh krožnice gre skozi središče preostalih 2 krožnic. Nato je narisal še 1 manjšo krožnico, ki se dotika vseh 3 krožnic (glej sliko). Koliko je polmer manjše krožnice, ki jo je narisal Nik?



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (E) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

8. Svit je prečkal most, ko je za sabo zagledal Zarjo, ki je bila ravno na začetku mosta in je tekla za njim. Če bi se Svit obrnil in bi nadaljeval z isto hitrostjo v smeri proti Zarji, bi se srečala ravno na sredini mosta. Ker pa se Svit ni želel vrniti 150 m, je nadaljeval z isto hitrostjo v prvotni smeri, Zarja, ki je ves čas tekla z isto hitrostjo, pa ga je ujela ravno na koncu mosta. Koliko metrov je dolg most, ki sta ga prečkala Svit in Zarja?

- (A) 225 (B) 300 (C) 450 (D) 600 (E) 900

NALOGE, VREDNE 4 TOČKE

9. Darinka je napisala število 2021 kot vsoto 5 naravnih števil, katerih številke so bile samo 5 ali 9. Koliko števk skupaj v teh 5 številih je bilo enakih 9?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

10. Perzefona je premešala kupček 9 kart, označenih s števili od 1 do 9. Nato je vrhnjih 5 kart s kupčka položila v vrsto od najmanjše do največje. Kolikšna je verjetnost, da je na srednji karti v vrsti število 5?

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{7}$ (E) $\frac{1}{3}$

11. Naj bo T dani trikotnik. Pri vsaki stranici trikotnika T narišemo kvadrat, ki ima to stranico za svojo diagonalo. Označimo z U unijo teh 3 kvadratov. Ali je možno, da trikotnik T ni vsebovan v uniji U ?

- (A) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 89, 47 in 44 stopinj.
 (B) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 95, 44 in 41 stopinj.
 (C) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 95, 47 in 38 stopinj.
 (D) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 171, 5 in 4 stopinje.
 (E) Ne, T je vsebovan v U za vsak trikotnik T .

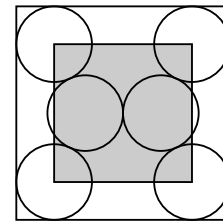
12. V jahalnem klubu Črna griva je skupno število konjev in jezdecev med 100 in 140. V nekem trenutku je imelo $\frac{2}{5}$ konjev jezdeca in $\frac{3}{7}$ jezdecev je jahalo konja, na 1 konju je bil največ 1 jezdec. Koliko je skupno število konjev in jezdecev v jahalnem klubu Črna griva?

- (A) 105 (B) 116 (C) 135 (D) 140
 (E) Nobeno od predhodnih števil.

13. Jure je pri vseh naravnih številih od 10 do 9999 za 1. številko na levi napisal decimalno vejico in nato vsa dobljena števila napisal v naraščajočem vrstnem redu. Na katero mesto v tem naraščajočem zaporedju števil je Jure napisal število 2,021?

- (A) 1133. (B) 1134. (C) 1135. (D) 1136. (E) 1137.

14. V kvadrat je včrtanih 6 krožnic s polmerom 1, vsaka od teh krožnic se dotika 1 ali 3 krožnic, središča 4 zunanjih krožnic so oglišča osenčenega kvadrata (glej sliko). Koliko je ploščina osenčenega kvadrata?

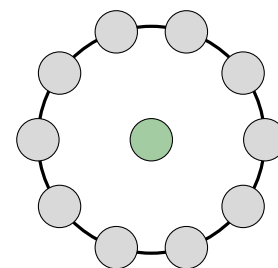


- (A) $2 + 8\sqrt{2}$ (B) $4 + 5\sqrt{3}$ (C) $5 + 4\sqrt{5}$
 (D) $6 + 3\sqrt{6}$ (E) $8 + 2\sqrt{7}$

15. Ana želi razporediti vsa naravna števila od 1 do 20 v pare, tako da bo razlika med številoma v paru pri vseh parih enaka. Ana obravnava vse pare kot neurejene pare, tako da (3,4) in (4,3) predstavljata isti par, torej je, na primer, razlika pri obeh parih (3, 4) in (8, 7) enaka 1, razlika pri obeh parih (3, 7) in (4, 8) pa je 4. Na koliko načinov lahko Ana razporedi omenjena števila v pare na želeni način?

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Več kot 5.

16. Meta želi napisati vsa cela števila od 0 do 10 v 11 krogov, od teh je 10 krogov na krožnici in 1 krog v središču krožnice (glej sliko), tako da bo v vsakem krogu zapisano 1 število, za vsak par števil v sosednjih krogih na krožnici pa bo eno od števil v paru delitelj ali večkratnik drugega števila v paru. Katero število mora Meta napisati v krog v središču krožnice?



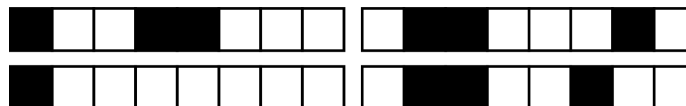
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 7

NALOGE, VREDNE 5 TOČK

17. Pravimo, da je trikotnik *skoraj enakostraničen*, če se velikost največjega notranjega kota trikotnika razlikuje od velikosti najmanjšega notranjega kota trikotnika za manj kot 6° . Za vsako nenegativno celo število n in dani trikotnik $A_n B_n C_n$ definiramo nov trikotnik $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$, katerega oglišča A_{n+1} , B_{n+1} in C_{n+1} so točke, v katerih se včrtana krožnica trikotnika $A_n B_n C_n$ dotika stranic trikotnika $A_n B_n C_n$. Katero je najmanjše naravno število k , za katero je trikotnik $A_k B_k C_k$ skoraj enakostraničen za poljuben začetni trikotnik $A_0 B_0 C_0$?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

18. Pravokotni trak je razdeljen na 8 enakih kvadratov, ki so na začetku vsi beli. Na vsakem koraku izberemo 4 zaporedne kvadrate in spremenimo barvo vseh teh 4 kvadratov: iz bele v črno ali iz črne v belo.



Koliko od 4 trakov na spodnji sliki lahko po nekaj korakih dobimo na opisani način?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

19. Giorgio želi imeti na obleki 6 rdečih, 3 zelene in 3 rumene gumbe, tako da bodo vsi gumbi prišiti drug poleg drugega na ravni črti in nobena sosednja 2 gumba ne bosta iste barve. Na koliko načinov lahko Giorgio razporedi gumbe na želeni način?

- (A) 20 (B) 60 (C) 100 (D) 120 (E) 720

20. Kvadratno mrežo, sestavljeno iz enotskih kvadratov, prekrivamo s pravokotniki velikosti 5×7 , tako da vsak pravokotnik prekrije natanko 35 enotskih kvadratov. Pravokotnike lahko položimo poljubno zasukane, pravokotniki se lahko tudi prekrivajo. Katero je največje naravno število N , za katero ni možno na opisani način prekriti natanko N enotskih kvadratov kvadratne mreže?

- (A) 43 (B) 44 (C) 45 (D) 46 (E) 48

21. Tea je hkrati vrgla 7 običajnih igralnih kock in seštela dobljene pike. Kolikšna je verjetnost, da je dobljena vsota pik večkratnik števila 6?

- (A) 0 (B) $\frac{6^6 - 1}{7 \cdot 6^6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) 1

22. Pravimo, da je *dolžina* naravnega števila n enaka največjemu številu členov v vsoti samih različnih števil, ki je enaka n . Na primer, dolžina števila 9 je 3, saj je $9 = 1 + 2 + 6$. Koliko je takih lihih števil, ki imajo dolžino 20?

- (A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 18 (E) 20

23. Luka ima 2 kocki, dolžina stranice ene od kock je enaka obratni vrednosti dolžine stranice druge kocke. Vsota površin obeh Lukovih kock je 138. Koliko je vsota prostornin Lukovih kock?

- (A) 100 (B) 110 (C) 121.5 (D) 125 (E) 140

24. Zazidljivo zemljišče ima obliko trikotnika ABC , pri čemer je $AB = 38$ m, $AC = 36$ m in $BC = 60$ m. Mama Neža je z daljico ED , pri čemer točka E leži na daljici AC in točka D leži na daljici BC , razdelila zemljišče na 2 dela, tako da sta njena sinova Jakob in Jurij dobila zemljišči $AEDB$ in ECD , ki imata enako ploščino in enak obseg. Koliko je vrednost $\frac{|BD|}{|CD|}$?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$