IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2009
Letnik 56
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2009, letnik 56, številka 5, strani 161–192

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

UVOD V SVET p-ADIČNIH ŠTEVIL

BARBARA DRINOVEC DRNOVŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11S80

V članku predstavimo pojem ultrametrične absolutne vrednosti in dokažemo nekaj njenih osnovnih lastnosti. Natančneje se ukvarjamo s p-adično absolutno vrednostjo na polju racionalnih števil in s p-adičnimi števili.

INTRODUCTION TO THE WORLD OF p-ADIC NUMBERS

We introduce the notion of an ultrametric absolute value on a field and present its fundamental properties. In particular, we study p-adic absolute value on the field of rational numbers and p-adic numbers.

Matematiki gradimo svoj svet iz pravil, ki jih imenujemo aksiomi. Aksiome povzamemo po lastnostih, ki jih v našem svetu pričakujemo. Če aksiome dobro izberemo, definirajo neprotislovno teorijo. Primer take teorije je evklidska geometrija. Zgodi se, da lahko katerega od aksiomov nadomestimo z drugim in dobimo drugačno neprotislovno teorijo. Na primer, če aksiom o vzporednici nadomestimo z aksiomom, ki zagotavlja, da skozi dano točko, ki ne leži na premici p, poteka več kot ena vzporednica k premici p, dobimo drugačno geometrijo, ki se imenuje *hiperbolična geometrija*.

V članku trikotniško neenakost, ki velja za običajno absolutno vrednost, nadomestimo z močnejšo lastnostjo, ki se imenuje ultrametrična lastnost. Tako dobimo absolutne vrednosti s presenetljivimi lastnostmi.

1. Absolutne vrednosti in metrike na $\mathbb{Q}$

Običajna evklidska razdalja med racionalnima številoma x in y je podana z $d(x, y) = |x - y|$ in je inducirana z običajno absolutno vrednostjo na $\mathbb{Q}$. Pravila, ki veljajo za običajno absolutno vrednost, združimo v definicijo absolutne vrednosti na poljubnem polju $\mathbb{F}$, to je na komutativnem obsegu. Seštevanje v $\mathbb{F}$ bomo označili s $+$, množenje pa s $\cdot$.

Definicija 1. Realno funkcijo $|\cdot|\colon \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ imenujemo *absolutna vrednost*, če ima naslednje lastnosti:

(a) *nenegativnost*: $|a| \geq 0$ za vsak $a \in \mathbb{F}$;
(b) *neizrojenost*: $|a| = 0$ natanko tedaj, kadar je $a = 0$;
(c) *multiplikativnost*: $|a \cdot b| = |a||b|$ za vse a, $b \in \mathbb{F}$;
(d) *trikotniška neenakost*: $|a + b| \leq |a| + |b|$ za vse a, $b \in \mathbb{F}$.

Polje $\mathbb{F}$, na katerem je definirana absolutna vrednost $|\cdot|$, imenujemo *polje z absolutno vrednostjo.*

Označimo z $\underline{1}$ enoto za množenje v $\mathbb{F}$. Iz multiplikativnosti sledi, da je $|\underline{1}| = |\underline{1} \cdot \underline{1}| = |\underline{1}|^2$, in zaradi neizrojenosti od tod dobimo $|\underline{1}| = 1$. Hitro lahko preverimo, da je funkcija

$$|a| = \begin{cases} 1\,; & a \neq 0 \\ 0\,; & a = 0 \end{cases}$$

absolutna vrednost na polju $\mathbb{F}$; imenujemo jo *trivialna absolutna vrednost.*

Na polju $\mathbb{F}$ z absolutno vrednostjo $|\cdot|$ definiramo preslikavo $d\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ s predpisom $d(a, b) = |a - b|$. Iz lastnosti (a), (b) in (d) v definiciji sledi, da je d metrika na $\mathbb{F}$. Tako postane vsako polje z absolutno vrednostjo metrični prostor.

Posebej nas bodo zanimale ultrametrične absolutne vrednosti:

Definicija 2. Naj bo $\mathbb{F}$ polje z absolutno vrednostjo $|\cdot|$. Pravimo, da je absolutna vrednost *ultrametrična*, če velja

$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\} \quad \text{za vse} \quad a, b \in \mathbb{F}\,. \tag{1}$$

Ultrametrična lastnost je močnejša od trikotniške neenakosti, saj je večje od števil $|a|$ in $|b|$ gotovo manjše od njune vsote $|a| + |b|$. V nadaljevanju bomo spoznali primer ultrametrične absolutne vrednosti na polju racionalnih števil.

Naj bo n celo število in p praštevilo. Z $\operatorname{red}_p n$ označimo najvišjo potenco števila p, ki deli n. Torej velja

$$\operatorname{red}_p n = k \Longleftrightarrow (p^k \mid n \quad \text{in} \quad p^{k+1} \nmid n)\,.$$

Racionalno število x zapišemo v obliki ulomka $x = m/n$ in definiramo $\operatorname{red}_p x = \operatorname{red}_p m - \operatorname{red}_p n$. Opazimo, da definicija ni odvisna od tega, kako x predstavimo z ulomkom. Preslikavo $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\operatorname{red}_p x}\,; & x \neq 0 \\ 0\,; & x = 0 \end{cases}.$$

Tako je na primer $|12|_2 = \left|2^2 \cdot 3\right|_2 = 2^{-2}$ in $\left|\frac{8}{21}\right|_3 = \left|\frac{8}{3 \cdot 7}\right|_3 = 3$.

Trditev 1. *Naj bo p praštevilo. Potem je $|\cdot|_p$ ultrametrična absolutna vrednost na polju $\mathbb{Q}$.*

Absolutno vrednost $|\cdot|_p$ imenujemo *p-adična absolutna vrednost.*

Dokaz. Lastnosti (a), (b) in (c) sledijo neposredno iz definicije. Dokažimo še lastnost (1). Izberimo poljubna $x, y \in \mathbb{Q}$. Če je katerokoli od števil $|x|_p$, $|y|_p$ ali $|x+y|_p$ enako 0, neenakost velja. Zato bomo v nadaljevanju predpostavili, da so vsa tri števila x, y in $x+y$ neničelna. Števili x in y zapišemo kot okrajšana ulomka $x = \frac{m}{n}$ in $y = \frac{k}{l}$. Potem je

$$\mathrm{red}_p(x+y) = \mathrm{red}_p \frac{ml+nk}{nl} = \mathrm{red}_p(ml+nk) - \mathrm{red}_p\, n - \mathrm{red}_p\, l\,.$$

Ker najvišja potenca, ki deli vsoto, ni manjša od najvišje potence, ki deli oba člena v vsoti, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{red}_p(x+y) &\geq \min\{\mathrm{red}_p(ml), \mathrm{red}_p(nk)\} - \mathrm{red}_p\, n - \mathrm{red}_p\, l = \\
&= \min\{\mathrm{red}_p\, m + \mathrm{red}_p\, l, \mathrm{red}_p\, n + \mathrm{red}_p\, k\} - \mathrm{red}_p\, n - \mathrm{red}_p\, l = \\
&= \min\{\mathrm{red}_p\, m - \mathrm{red}_p\, n, \mathrm{red}_p\, k - \mathrm{red}_p\, l\} = \\
&= \min\left\{\mathrm{red}_p \frac{m}{n}, \mathrm{red}_p \frac{k}{l}\right\} = \min\{\mathrm{red}_p\, x, \mathrm{red}_p\, y\}\,.
\end{aligned}$$

Zato je $p^{\mathrm{red}_p(x+y)} \geq \min\{p^{\mathrm{red}_p x}, p^{\mathrm{red}_p y}\}$. Sedaj upoštevamo definicijo absolutne vrednosti in dobimo

$$|x+y|_p = p^{-\mathrm{red}_p(x+y)} \leq \max\left\{p^{-\mathrm{red}_p x}, p^{-\mathrm{red}_p y}\right\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}\,. \qquad \blacksquare$$

Pravimo, da sta absolutni vrednosti ekvivalentni, če inducirata ekvivalentni metriki. Absolutne vrednosti na polju racionalnih števil karakterizira naslednji izrek:

Izrek 2 (Ostrowski). *Netrivialna absolutna vrednost na $\mathbb{Q}$ je ekvivalentna bodisi običajni bodisi p-adični za neko praštevilo p.*

Elementaren dokaz tega izreka najdemo na primer v [3], konstrukcijo p-adične absolutne vrednosti pa v [2, 3, 4].

2. Lastnosti ultrametričnih absolutnih vrednosti

Najprej pokažimo, da v oceni (1) velja enačaj, če je $|a| \neq |b|$.

Lema 3. *Naj bo $\mathbb{F}$ polje z ultrametrično absolutno vrednostjo $|\cdot|$. Potem je vsak trikotnik v $\mathbb{F}$ enakokrak, to pomeni, da sta za poljubne elemente $a, b, c \in \mathbb{F}$ vsaj dve od števil $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ enaki. Velja sklep*

$$|a| \neq |b| \Longrightarrow |a+b| = \max\{|a|, |b|\} \quad \textit{za vse} \quad a, b \in \mathbb{F}\,. \tag{2}$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da iz (2) sledi, da je vsak trikotnik enakokrak. Izberimo poljubne tri elemente $a, b, c \in \mathbb{F}$ – oglišča trikotnika. Če je $|a-b| = |b-c|$, je dani trikotnik enakokrak. Sicer vzamemo $a' = a - b$ in $b' = b - c$ in iz (2) sklepamo, da je $|a-c| = |a'+b'| = \max\{|a'|, |b'|\} = \max\{|a-b|, |b-c|\}$ in spet lahko ugotovimo, da je trikotnik, ki ga razpenjajo a, b in c, enakokrak.

Dokažimo še (2). Izberimo poljubna elementa $a, b \in \mathbb{F}$ in denimo, da $|a| \neq |b|$. Predpostaviti smemo, da je

$$|a| < |b|\,,$$

sicer zamenjamo vlogi a in b. Dokazati moramo, da je $|a+b| = |b|$. Upoštevamo ultrametrično lastnost in manjše število nadomestimo z večjim

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\} = |b|\,.$$

Po preoblikovanju izraza upoštevamo ultrametrično lastnost, manjše število nadomestimo z večjim ter nazadnje upoštevamo prejšnjo oceno

$$|b| = |(a+b) - a| \leq \max\{|a+b|, |a|\} \leq \max\{|a+b|, |b|\} \leq |b|\,.$$

Ker sta začetek in konec enaka, povsod velja enačaj. Torej je $|b| = \max\{|a+b|, |a|\}$. Ker je $|a| < |b|$, lahko sklepamo, da je $|a+b| = |b|$. ■

Osnovne lastnosti ultrametričnih absolutnih vrednosti so tema prvih poglavij v [2, 3].

Delne vsote harmonične vrste $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$ imenujemo *harmonična števila*. Ker je harmonična vrsta divergentna vrsta s pozitivnimi členi, je zaporedje harmoničnih števil navzgor neomejeno. Z uporabo zgornje leme bomo na preprost način dokazali naslednjo lastnost harmoničnih števil, ki je bila prvič dokazana v [5].

Trditev 4. *Harmonično število H_m ni naravno število za noben $m \geq 2$.*

Dokaz. Ker je $m \geq 2$, obstaja največje naravno število n, za katero velja $2^n \leq m$. Potem je

$$\left|\frac{1}{2^n}\right|_2 = 2^n \quad \text{in} \quad \left|\frac{1}{k}\right|_2 < 2^n \quad \text{za vse} \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{2^n\}\,.$$

Zato iz ultrametrične lastnosti sledi

$$\begin{aligned}\left|H_m - \frac{1}{2^n}\right|_2 &= \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{m}\right|_2 \leq \\ &\leq \max\left\{|1|_2, \left|\frac{1}{2}\right|_2, \ldots, \left|\frac{1}{2^n-1}\right|_2, \left|\frac{1}{2^n+1}\right|_2, \ldots, \left|\frac{1}{m}\right|_2\right\} < 2^n.\end{aligned}$$

Sedaj pa z uporabo (2) dobimo

$$|H_m|_2 = \left|H_m - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right|_2 = \max\left\{\left|H_m - \frac{1}{2^n}\right|_2, \left|\frac{1}{2^n}\right|_2\right\} = 2^n.$$

Dokazali smo, da je $|H_m|_2 > 1$, zato H_m ni naravno število. ∎

Za običajno absolutno vrednost na $\mathbb{Q}$ ali $\mathbb{R}$ pravimo, da ima *arhimedsko lastnost*; to pomeni, da za poljubni števili $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, obstaja tako število $n \in \mathbb{N}$, za katero velja $|nx| > |y|$. V posebnem primeru od tod sledi, da so naravna števila poljubno velika. Definicijo lahko smiselno razširimo na katerokoli polje z absolutno vrednostjo.

V nadaljevanju tega razdelka bomo dokazali, da je absolutna vrednost, ki ni arhimedska, ultrametrična in obratno, da je absolutna vrednost, ki ni ultrametrična, arhimedska. Dokaz bomo povzeli po [2].

V vsakem polju $\mathbb{F}$ lahko zagledamo naravna števila takole: Označimo z $\underline{1}$ enoto za množenje v $\mathbb{F}$. Ker je polje $\mathbb{F}$ zaprto za seštevanje, je $\underline{1} + \underline{1} \in \mathbb{F}$ in ta element označimo z $\underline{2}$. Induktivno nadaljujemo. Denimo, da smo že konstruirali $\underline{n}$. Potem definiramo $\underline{n+1} = \underline{n} + \underline{1}$. Natančneje, konstruirali smo homomorfizem aditivne grupe $(\mathbb{Z}, +)$ v aditivno grupo $(\mathbb{F}, +)$.

Izrek 5. *Absolutna vrednost $|\cdot|$ na polju $\mathbb{F}$ je ultrametrična natanko tedaj, kadar je $|\underline{n}| \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Denimo, da je $|\cdot|$ ultrametrična absolutna vrednost na $\mathbb{F}$. Z indukcijo dokažimo, da je $|\underline{n}| \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$. V katerikoli absolutni vrednosti velja

$|\underline{1}| = 1$. Denimo, da je $|\underline{n}| \leq 1$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Zaradi ultrametrične lastnosti absolutne vrednosti velja

$$|\underline{n+1}| = |\underline{n} + \underline{1}| \leq \max\{|\underline{n}|, 1\} = 1\,.$$

Torej po načelu popolne indukcije ocena velja za vse $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo še, da velja obratno. Denimo, da je $|\underline{n}| \leq 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokazati moramo, da velja $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ za vse $a, b \in \mathbb{F}$. Če je $b = 0$, neenakost velja. V nasprotnem primeru lahko delimo z b in dobimo $|\frac{a}{b} + \underline{1}| \leq \max\{|\frac{a}{b}|, 1\}$. Zato je dovolj, da dokažemo, da za vse $a \in \mathbb{F}$ velja $|a + \underline{1}| \leq \max\{|a|, 1\}$. Ker je $\mathbb{F}$ polje, velja binomska formula in zato za $a \in \mathbb{F}$ in $m \in \mathbb{N}$ velja

$$|a+\underline{1}|^m = |(a+\underline{1})^m| = \left|\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k\right| \leq \sum_{k=0}^{m} \left|\underline{\binom{m}{k}}\right| |a|^k.$$

Uporabimo predpostavko in opazimo, da je bodisi $|a| < 1$ bodisi $|a|^k \leq |a|^m$ za $k \leq m$, in izpeljemo

$$|a+\underline{1}|^m \leq \sum_{k=0}^{m} |a|^k \leq (m+1)\max\{1, |a|^m\}\,.$$

Od tod sledi

$$|a+\underline{1}| \leq \sqrt[m]{(m+1)}\max\{1, |a|\} \quad \text{za vse} \quad m \in \mathbb{N}\,, \quad a \in \mathbb{F}\,.$$

V limiti, ko pošljemo m v neskončno, dobimo

$$|a+\underline{1}| \leq \max\{1, |a|\} \quad \text{za vse} \quad a \in \mathbb{F}\,,$$

kar je bilo treba dokazati. ∎

Posledica 6. *Absolutna vrednost na polju $\mathbb{F}$ je ultrametrična natanko tedaj, kadar ni arhimedska.*

Ker je ultrametrična lastnost nasprotna arhimedski, jo pogosto imenujejo kar nearhimedska lastnost [2, 3].

Dokaz. Če je absolutna vrednost $|\cdot|$ arhimedska, potem obstaja naravno število $n \in \mathbb{N}$, za katero velja

$$|\underline{n}| = |\underline{n} \cdot \underline{1}| > |\underline{1}| = 1\,.$$

Od tod po izreku sledi, da $|\cdot|$ ni ultrametrična.

Če $|\cdot|$ ni ultrametrična, po izreku obstaja naravno število $n \in \mathbb{N}$, za katero velja $|\underline{n}| > 1$. Pokažimo, da je $|\cdot|$ arhimedska absolutna vrednost. Izberimo poljubna $a, b \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$. Ker je $|\underline{n}| > 1$, so števila $|\underline{n}^l \cdot a| = |\underline{n}|^l |a|$ poljubno velika, če le izberemo dovolj velik $l \in \mathbb{N}$. Zato za dovolj velik l velja $|n^l a| > |b|$. Torej je $|\cdot|$ arhimedska absolutna vrednost. ∎

3. Napolnitev metričnega prostora $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$

Iz analize vemo, da množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ z običajno metriko ni poln metrični prostor. Primer Cauchyjevega zaporedja, ki ne konvergira, je zaporedje desetiških približkov za $\sqrt{2}$. Vsak metričen prostor pa lahko vložimo v poln metričen prostor kot gost podprostor. Napolnitev metričnega prostora racionalnih števil $\mathbb{Q}$ z običajno metriko je metrični prostor realnih števil z običajno metriko. Napolnitev metričnega prostora $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ imenujemo *metrični prostor p-adičnih števil* in ga označimo s $\mathbb{Q}_p$. Oglejmo si, kdaj vrsta v tem metričnem prostoru konvergira. V primerjavi z običajno metriko v $\mathbb{R}$ je kriterij za konvergenco vrste v $\mathbb{Q}_p$ zelo preprost. Sledili bomo načinu v [3].

Izrek 7. *Naj bo p praštevilo in $\{a_n\}$ zaporedje p-adičnih števil. Potem je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna v $\mathbb{Q}_p$ natanko tedaj, kadar je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$.*

Dokaz. Ker so p-adična števila poln metričen prostor, je vrsta iz p-adičnih števil konvergentna natanko tedaj, kadar je zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$ Cauchyjevo.

Vzamemo $n > m$ in z upoštevanjem ultrametrične lastnosti p-adične absolutne vrednosti dobimo

$$|s_n - s_m|_p = |a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}|_p \leq \max\{|a_n|_p, |a_{n-1}|_p, \ldots, |a_{m+1}|_p\}.$$

Če je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$, od tod sledi, da je zaporedje $\{s_n\}$ Cauchyjevo.

Denimo, da zaporedje $\{|a_n|_p\}$ ne konvergira k 0. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem za vsak še tako velik n_0 obstaja $n > n_0$, da je $|a_n|_p > \epsilon$. Torej je

$$|s_n - s_{n-1}|_p = |a_n|_p > \epsilon$$

in zato zaporedje $\{s_n\}$ ni Cauchyjevo. ∎

Posledica 8. *Naj bo p praštevilo, $m \in \mathbb{Z}$ in $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ za $n \geq m$. Potem vrsta $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n p^n$ konvergira v $\mathbb{Q}_p$.*

Dokaz. Izračunajmo absolutno vrednost neničelnega člena v vrsti $|a_n p^n|_p = p^{-n}$. Torej zaporedje absolutnih vrednosti členov v vrsti konvergira proti 0, zato po izreku vrsta konvergira. ■

Primer. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n$ je po posledici konvergentna v $\mathbb{Q}_5$. Poenostavimo njeno delno vsoto

$$s_m = 1 + 5 + \cdots + 5^m = \frac{5^{m+1} - 1}{5 - 1} = \frac{5^{m+1}}{4} - \frac{1}{4}\,.$$

Ker je $\lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{5^{m+1}}{4}\right|_5 = \lim\limits_{m\to\infty} 5^{-m-1} = 0$, zaporedje $\{s_m\}$ v metričnem prostoru p-adičnih števil konvergira k $-\frac{1}{4}$. Zato je vsota dane vrste $-\frac{1}{4}$.

V nadaljevanju bomo vsako p-adično število predstavili kot vsoto take vrste. Vemo, da lahko vsako realno število zapišemo v decimalni obliki, to je pravzaprav v obliki vrste: $x \in \mathbb{R}$ zapišemo v decimalni obliki

$$x = d{,}d_1 d_2 \ldots = d + \sum_{j=1}^{\infty} d_j 10^{-j}, \quad \text{kjer je} \quad d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}\,.$$

Drugače od decimalnega zapisa, ki ni enoličen, je razvoj p-adičnih števil v vrsto enoličen.

Izrek 9. *Naj bo p praštevilo in $\alpha \in \mathbb{Q}_p$. Potem obstajajo enolično določena števila $m \in \mathbb{Z}$ in $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ za $n \geq m$, za katera velja*

$$\alpha = \sum_{n=m}^{\infty} a_n p^n.$$

Dokažimo pomožno lemo.

Lema 10. *Naj bo p praštevilo in $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, za katerega je $|\alpha|_p \leq 1$. Potem obstaja število $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, za katero je $|\alpha - a|_p \leq \frac{1}{p}$.*

Dokaz. Lemo najprej dokažemo v primeru, da je α racionalno število. Potem lahko α zapišemo kot okrajšan ulomek $\alpha = \frac{k}{l}$. Ker je $\left|\frac{k}{l}\right|_p \leq 1$, p ne deli l, in ker je p praštevilo, sta si števili p in l tuji. Zato obstajata celi števili $s, t \in \mathbb{Z}$, za kateri velja $sl + tp = 1$. Označimo z a ostanek števila ks pri deljenju s p, tj. $ks = mp + a$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$ in $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Po definiciji p-adične absolutne vrednosti izračunamo

$$\left|\frac{k}{l} - ks\right|_p = \left|\frac{k}{l}\right|_p |1 - sl|_p = \left|\frac{k}{l}\right|_p |tp|_p \leq |t|_p \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p}\,.$$

Upoštevamo ultrametrično lastnost in dobimo

$$|\alpha - a|_p = \left|\frac{k}{l} - ks + mp\right|_p \leq \max\left\{\left|\frac{k}{l} - ks\right|_p, |mp|_p\right\} \leq \frac{1}{p}\,.$$

S tem je za racionalne α lema dokazana.

Sedaj izberemo poljuben $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, za katerega je $|\alpha|_p \leq 1$. Ker je metrični prostor p-adičnih števil napolnitev metričnega prostora racionalnih števil s p-adično metriko, lahko poljubno blizu p-adičnemu številu najdemo racionalno število. Zato obstaja racionalno število $\beta \in \mathbb{Q}$, za katero velja $|\alpha - \beta|_p \leq \frac{1}{p}$. Z upoštevanjem ultrametrične lastnosti p-adične absolutne vrednosti dobimo $|\beta|_p = |\beta - \alpha + \alpha|_p \leq \max\{|\alpha - \beta|_p, |\alpha|_p\} \leq 1$. Po že dokazanem obstaja $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, za katerega je $|\beta - a|_p \leq \frac{1}{p}$. Še enkrat uporabimo ultrametrično lastnost absolutne vrednosti in dobimo

$$|\alpha - a|_p = |\alpha - \beta + \beta - a|_p \leq \max\{|\alpha - \beta|_p, |\beta - a|_p\} \leq \frac{1}{p}\,. \qquad \blacksquare$$

Dokaz (izreka 9). Najprej bomo dokazali obstoj razvoja p-adičnega števila v vrsto in nato enoličnost tega zapisa. Denimo, da je $|\alpha|_p \leq 1$. Števila a_n konstruiramo induktivno. Po lemi obstaja $a_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, za katerega je

$$|\alpha - a_0|_p \leq \frac{1}{p}\,.$$

Denimo, da smo že konstruirali $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, za katere je

$$\left|\alpha - \sum_{n=0}^{m} a_n p^n\right|_p \leq \frac{1}{p^{m+1}}\,. \tag{3}$$

Potem je $\left|p^{-(m+1)}\alpha - \sum\limits_{n=0}^{m} a_n p^{n-m-1}\right|_p \leq 1$ in po lemi obstaja $a_{m+1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, za katerega je $\left|p^{-(m+1)}\alpha - \sum\limits_{n=0}^{m} a_n p^{n-m-1} - a_{m+1}\right|_p \leq \frac{1}{p}$, to pomeni, da je

$$\left|\alpha - \sum_{n=0}^{m} a_n p^n - a_{m+1}p^{m+1}\right|_p \leq \frac{1}{p^{m+2}}\,,$$

kar zaključi induktivno konstrukcijo. Iz posledice 8 sledi, da je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ konvergentna, in iz ocene (3), da je njena vsota enaka α.

Če je $|\alpha|_p > 1$, obstaja celo število m, za katero je $|p^m\alpha| \leq 1$, in iz razvoja števila $p^m\alpha$ dobimo ustrezni razvoj za α.

Dokažimo še enoličnost. Predpostavimo, da ima α dva različna razvoja v vrsto: $\alpha = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n p^n = \sum\limits_{n=l}^{\infty} b_n p^n$. Definirajmo $a_k = 0$ za $k < m$ in $b_k = 0$ za $k < l$. Označimo s k_0 najmanjši indeks, za katerega sta števili a_k in b_k različni. Razliko $d = \left|\sum\limits_{n=-\infty}^{k_0} a_n p^n - \sum\limits_{n=-\infty}^{k_0} b_n p^n\right|_p$ izračunamo na dva načina. Ker je k_0 najmanjši indeks, za katerega sta števili a_k in b_k različni, je $d = \left|(a_{k_0} - b_{k_0})p^{k_0}\right|_p = p^{-k_0}$. Po drugi strani pa upoštevamo ultrametrično lastnost in dobimo

$$\begin{aligned}
d &= \left|\sum_{n=-\infty}^{k_0} a_n p^n - \sum_{n=-\infty}^{k_0} b_n p^n\right|_p = \left|\sum_{n=m}^{k_0} a_n p^n - \alpha + \alpha - \sum_{n=l}^{k_0} b_n p^n\right|_p \leq \\
&\leq \max\left\{\left|\sum_{n=m}^{k_0} a_n p^n - \alpha\right|_p, \left|\alpha - \sum_{n=l}^{k_0} b_n p^n\right|_p\right\} = \\
&= \max\left\{\left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_n p^n\right|_p, \left|\sum_{n=k_0+1}^{\infty} b_n p^n\right|_p\right\} < \frac{1}{p^{k_0}}\,,
\end{aligned}$$

kar je protislovje. Torej je zapis enoličen. ∎

Trditev 11. *Naj bo p praštevilo.*

(a) Množica p-adičnih števil $\mathbb{Q}_p$ je neštevna, zato je množica racionalnih števil njena prava podmnožica.

(b) Polje $\mathbb{Q}_p$ ni algebraično zaprto.

Dokaz. (a) Spomnimo bralca, da neštevnost množice realnih števil dokažemo z uporabo Cantorjevega diagonalnega trika. Predpostavimo, da je množica realnih števil števna; realna števila zapišemo v zaporedje in konstruiramo realno število, ki se na n-tem decimalnem mestu razlikuje od n-tega člena v zaporedju. To realno število ni člen zaporedja, kar je protislovje.

Podobno dokažemo, da množica vrst $\alpha = \sum_{n=m}^{\infty} a_n p^n$, kjer je $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ za $n \geq m$, ni števna. Ker je množica racionalnih števil števna, je njena prava podmnožica.

(b) V polju $\mathbb{Q}_p$ polinom $q(x) = x^2 - p$ nima ničel: denimo, da je $x \in \mathbb{Q}_p$ ničla polinoma q. Potem je $|x|_p = p^k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Ker je x rešitev enačbe $x^2 = p$, je $|x|_p^2 = |p|_p$, od koder sledi $p^{2k} = p^{-1}$, kar je nemogoče. Torej polinom q v polju $\mathbb{Q}_p$ nima ničel, zato polje $\mathbb{Q}_p$ ni algebraično zaprto. ■

Kot zanimivost omenimo, da lahko p-adično absolutno vrednost razširimo na algebraično zaprtje polja $\mathbb{Q}_p$, vendar to polje ni poln metričen prostor; šele njegova napolnitev $\mathbb{C}_p$ ustreza polju kompleksnih števil z običajno absolutno vrednostjo. Zahtevnejši bralec si o tem lahko prebere v [4].

LITERATURA

[1] Andrew Baker, *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis*, 2007, `http://www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf`.

[2] Fernando Q. Gouvêa, *p-adic numbers. An introduction*, 2. izdaja, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[3] Neal Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, 2. izdaja, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer-Verlag, New York, 1984.

[4] Alain M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] Leopold Theisinger, *Bemerkung über die harmonische Reihe*, Monatsh. Math. Phys. **26** (1915), str. 132–134.

[6] Jože Vrabec, *Metrični prostori*, Matematika – fizika 31, DMFA, Ljubljana, 1990.

POT NA LUNO

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 45.20.dg, 45.50.Pk

Gibanja izstrelka z Zemlje na Luno z najmanjšo mogočo začetno kinetično energijo zlahka opišemo z energijske plati. Na težavo pa naletimo pri računanju časovne odvisnosti. Izstrelek v tem primeru ne bi dospel na Luno v doglednem času, ker gre skozi labilno ravnovesno lego. Drugi preprost zgled je fizično nihalo. Gre za dinamične sisteme, ki so močno občutljivi za začetne pogoje.

MOON TRAVEL

The motion of a projectile from the earth to the moon with minimal initial kinetic energy is easily described with respect to energy. Diffuculties arise, however, in calculating the time dependence. The projectile in this case would not reach the moon in reasonable time because it is passing through a labile equilibrium point. Another simple example is the physical pendulum. These are dynamical systems that are highly sensitive to initial conditions.

Ob štiridesetletnici prvega pristanka ljudi na Luni se zdi poučno obdelati preprost model potovanja z Zemlje na Luno. Mislimo na izstrelek, ki ga s površja Zemlje izstrelimo proti Luni. Izberemo najmanjšo mogočo začetno kinetično energijo, ki se zdi potrebna, da izstrelek dospe na Luno. Ne upoštevamo upora v ozračju in vrtenja Zemlje. Pokaže se, da je primer zanimiv, ker gre izstrelek skozi labilno ravnovesno lego.

Po izreku o kinetični in potencialni energiji se vsota kinetične in potencialne energije ohrani, če na izstrelek delujeta le Zemlja in Luna z gravitacijo. Energijo preračunamo na enoto mase izstrelka:

$$W/m = \frac{1}{2}v^2 - \mathcal{G}M/r - \mathcal{G}M'/(R-r) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}V^2(1/x + a/(1-x))\,.$$

$\mathcal{G} = 6{,}67428 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2) je gravitacijska konstanta, $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg masa Zemlje, $M' = 7{,}3477 \cdot 10^{22}$ kg masa Lune in $R = 384\,400$ km povprečna razdalja med njunima središčema. Razmerje med maso Lune in maso Zemlje meri $a = M'/M = 0{,}01230$. Enačbo smo zapisali tudi v brezdimenzijski obliki z $x = r/R$ in ubežno hitrostjo z Zemlje na razdalji Lune, če Lune ne bi bilo tam: $V = \sqrt{2\mathcal{G}M/R} = 1{,}4403$ km/s. Srednji polmer Zemlje meri $r_0 = 6371{,}0$ km, tako da je $x_0 = 0{,}01657$, in srednji polmer Lune $r'_0 = 1731{,}1$ km, tako da je $x'_0 = 0{,}004503$ in $1 - x'_0 = 0{,}9955$. Za gravitacijsko konstanto je naveden podatek CODATA iz leta 2008, vsi drugi podatki pa so iz Wikipedije. Čeprav navajamo podatke in rezultate s petimi mesti, je treba upoštevati, da se Luna giblje okoli Zemlje po elipsi in sta Zemlja in Luna ob ekvatorju odebeljeni.

Potencialna energija je največja v nevtralni točki, v kateri je $\partial W/\partial x = 0$ in je rezultanta sil enaka nič. Iz zveze $1/x_1^2 = a/(1-x_1)^2$ sledi $x_1 = 1/\left(1+\sqrt{a}\right) = 0{,}90017$. Tam je vrh potencialnega nasipa, na katerem je na enoto mase izstrelka preračunana potencialna energija enaka $-(\mathcal{G}M/R)$ $(1/x_1 + a/(1-x_1)) = -\frac{1}{2}V^2(1+\sqrt{a})^2$. Izstrelek ima v nevtralni točki kinetično energijo 0. V tej točki prepoznamo labilno ravnovesno lego.

Na površju Zemlje je začetna hitrost v_0:

$$v_0 = v_u\sqrt{1 + ax_0/(1-x_0) - \left(1+\sqrt{a}\right)^2 x_0} = \\ = V\sqrt{1/x_0 + a/(1-x_0) - \left(1+\sqrt{a}\right)^2}\,.$$

$v_u = \sqrt{2\mathcal{G}M/r_0} = 11{,}1875$ km/s je ubežna hitrost na površju Zemlje. V našem primeru je začetna hitrost $v_0 = 11{,}0736$ km/s malo manjša od ubežne hitrosti.

Formula za hitrost, s katero izstrelek zadene površje Lune, je podobna:

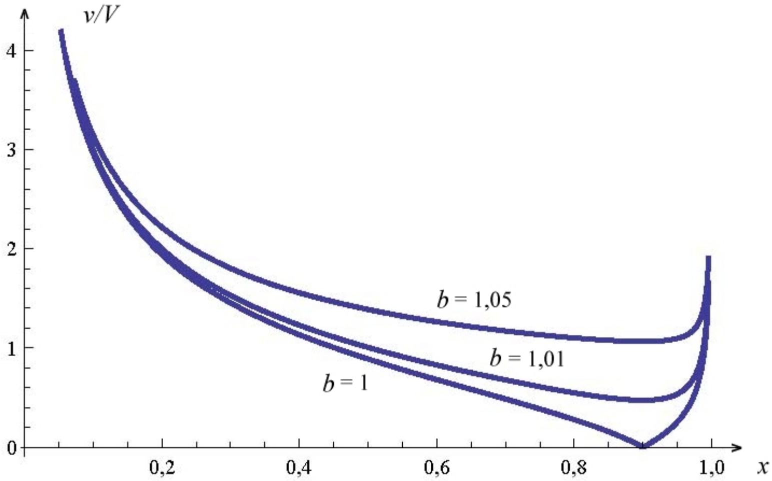
$$v'_0 = v'_u\sqrt{1 - a'x'_0(1-x'_0) - \left(1+\sqrt{a'}\right)^2 x'_0} = \\ = V'\sqrt{1/x'_0 + a'/(1-x'_0) - \left(1+\sqrt{a'}\right)^2}\,.$$

Pri tem je $V' = \sqrt{2\mathcal{G}M'/R} = \sqrt{a}V = 0{,}1597$ km/s ubežna hitrost z Lune na razdalji Zemlje, če Zemlje ne bi bilo tam. Ubežna hitrost na površju Lune meri $v'_u = \sqrt{2\mathcal{G}M'/r'_0} = 2{,}3803$ km/s, hitrost ob padcu je nekoliko manjša: $v'_0 = 2{,}2787$ km/s. Pri tem je $a' = 1/a$. S to hitrostjo bi izstrelili izstrelek s površja Lune, da bi z najmanjšo kinetično energijo dosegel Zemljo. V splošnem si pri pojavih, ki jih opišemo z navedenimi enačbami, lahko mislimo, da teče čas tako ali obrnjeno. Klasična mehanika – in druge teorije razen termodinamike in teorije šibke interakcije – so namreč invariantne na obrat časa.

Iz izraza za kinetično energijo izračunamo hitrost izstrelka:

$$v/V = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{a}{1-x} - \left(1+\sqrt{a}\right)^2} = \frac{1-(1+\sqrt{a})\,x}{\sqrt{x(1-x)}}\,. \tag{1}$$

Zadnja enačba jasno pokaže, da je hitrost v labilni legi enaka 0. Razprava o izreku o kinetični in potencialni energijie in hitrosti, ki smo jo izračunali iz njega, ni pripeljala do težav (slika 1). Težave so se pojavile, ko smo se zanimali za časovni potek gibanja.



Slika 1. Hitrost izstrelka je odvisna od kraja in od parametra b. Pri tem je $V = 1{,}4403$ km/s in $b = 1$ ustreza mejnemu primeru.

Na težave naletimo, ko poskusimo izračunati čas v odvisnosti od razdalje:

$$Vt/R = \int_0^x \frac{\sqrt{x(1-x)}\,dx}{1-(1+\sqrt{a})\,x} = -\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2}\int_1^u \frac{\sqrt{(1-u)(u+\sqrt{a})}}{u}\,du \tag{2}$$

Vpeljali smo novo spremenljivko $u = 1-(1+\sqrt{a})\,x$. Spremenljivka u teče od 1 do $\sqrt{a}$, v labilni ravnovesni legi pa je enaka 0. Zadnji nedoločeni integral najdemo v tabelah [1]. Nazadnje preidemo na staro spremenljivko in upoštevamo začetni pogoj $t(x=0)=0$ ter dobimo:

$$Vt/R = \sqrt{2\mathcal{G}M/R^3}\,t = \left(1+\sqrt{a}\right)^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)\arcsin(2x-1) + \right.$$

$$+\sqrt{\sqrt{a}}\,\ln\frac{(1+\sqrt{a})\Big(1-(1-\sqrt{a})\,x - 2\sqrt{\sqrt{a}x(1-x)}\Big)}{1-(1+\sqrt{a})\,x} -$$

$$-(1+\sqrt{a})\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{\sqrt{a}}\,\ln\left(1+\sqrt{a}\right)+\left(1-\sqrt{a}\right)\frac{\pi}{4}\Bigg].\quad(3)$$

Člen z logaritmom v labilni legi pri $x_1 = 1/(1+\sqrt{a})$ naraste čez vse meje. Zaradi tega za naš primer ne moremo izračunati, koliko časa bi potoval izstrelek. Izstrelek se z Zemlje giblje s pojemajočo hitrostjo in v nevtralni točki obmiruje. Zelo majhna motnja na eno stran zadostuje, da se iz labilne lege začne gibati proti Luni ali na drugo stran proti Zemlji. Opraviti imamo z dinamičnim sistemom, ki je močno občutljiv za začetne pogoje. Taki sistemi imajo pomembno vlogo v teoriji kaosa.

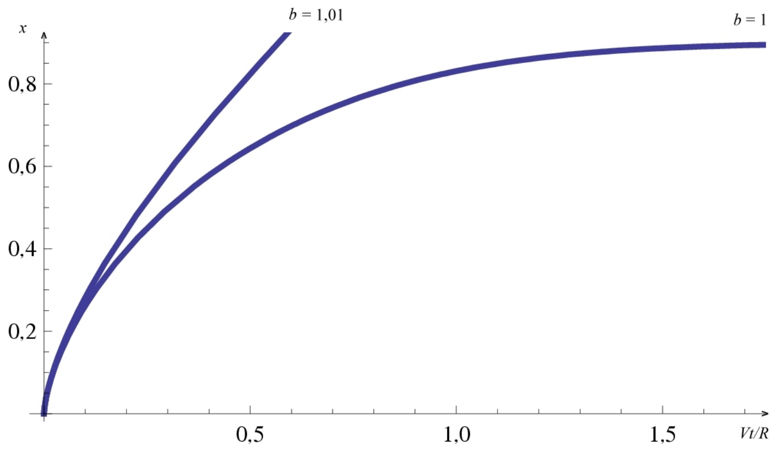
Najhitreje pojasni razmere približek enačbe (2) za $u \ll 1$:

$$Vt/R = -\frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{(1+\sqrt{a})^2}\int_1^u \frac{du}{u} = -\frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{(1+\sqrt{a})^2}\ln u \qquad (4)$$

z rešitvijo $u \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ in $\tau = R\sqrt{\sqrt{a}}\Big/\left(V(1+\sqrt{a})^2\right)$. V našem primeru meri relaksacijski čas $\tau = 20$ ur. Relaksacijski čas za izstrelek, ki bi ga s hitrostjo v_0' izstrelili z Lune, meri

$$\tau' = R\sqrt{\sqrt{a'}}\Big/\left(V'\left(1+\sqrt{a'}\right)^2\right) = (R/V)\sqrt{a'}\sqrt{\sqrt{a'}}\Big/\left(1+\sqrt{a'}\right)^2 = \tau\,.$$

Ugotovimo, da se faktorja z razmerjema mas ujemata, če upoštevamo, da je $a' = 1/a$. Izstrelek se z enakim relaksacijskim časom bliža labilni ravnovesni legi, ko ga izstrelimo z Zemlje ali z Lune.



Slika 2. Odvisnost razdalje x od t za mejni primer $b = 1$ in za $b = 1{,}01$

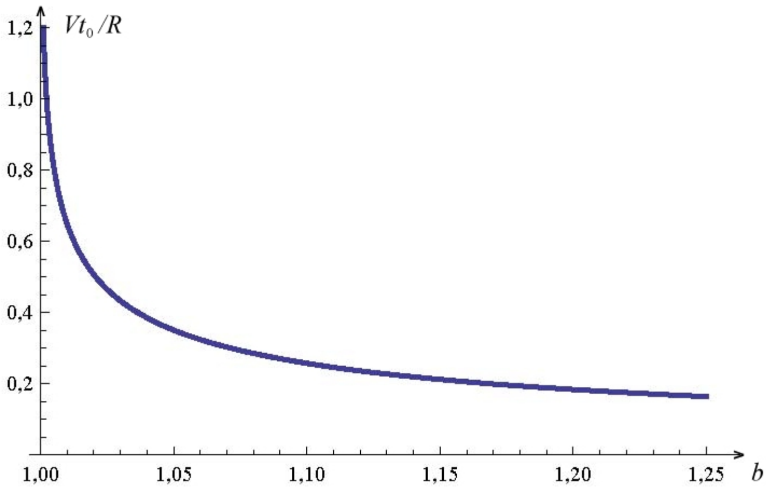
Vzamemo malo večjo začetno hitrost bv_0, $b > 1$ (slika 1):

$$v/V = \sqrt{1/x + a/(1-x) - A}\,, \quad A = \big(1+\sqrt{a}\big)^2 - \big(b^2-1\big)(v_0/V)^2.$$

Integralu damo za numerično računanje pripravno obliko:

$$Vt/R = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x(1-x)}{1-(1-a)x - Ax(1-x)}}\,dx\,.$$

Razdalja v odvisnosti od časa je inverzna funkcija $x(t)$, ki jo nariše *Mathematica* (slika 2). Trajanje potovanja t_0 z Zemlje na Luno v odvisnosti od parametra b izračunamo z numerično integracijo med $x = 0{,}01656$ in $0{,}9955$ (slika 3).

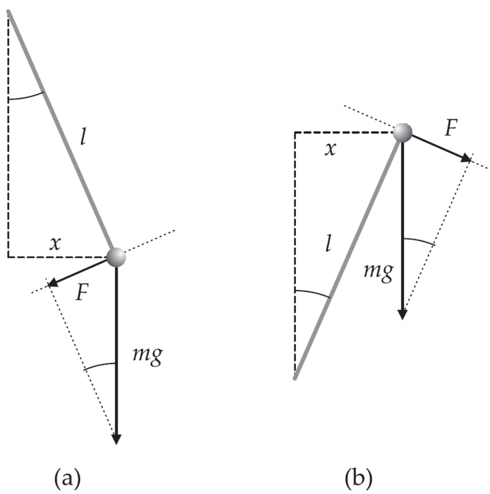


Slika 3. Trajanje potovanja t_0 je odvisno od parametra b. Hitrost v nevtralni točki meri $v_1 = \sqrt{b^2-1}\,v_0$. Izstrelek s hitrostjo 11 km/s ne bi dosegel Lune, ampak bi se obrnil že na polovici razdalje do nje. Pri $b = 1{,}01$ bi trajalo potovanje na Luno 2 dneva. Z ubežno hitrostjo pa bi pri $b = v_u/v_0 = 1{,}0103$ potovanje trajalo $t_0 = 1{,}906$ dneva. Na abscisno os je nanesena brezdimenzijska količina Vt/R z $R/V = 74{,}14$ ure.

Kot bolj domač zgled z enakim ozadjem si oglejmo fizično nihalo.[1] Zaradi preprostosti vzemimo tog drog z zanemarljivo majhno maso in dolžino l, ki ima na enem krajišču drobno utež z maso m in je vrtljiv okoli pravokotne

[1]Mimogrede pripomnimo, da je dvojno fizično nihalo eden od najpreprostejših sistemov, pri katerih zasledimo kaos. Način, s katerim je gibanje takega nihala opisal Henri Poincaré že davno pred časom računalnikov, so po njihovi uvedbi uporabili pri opisu kaosa.

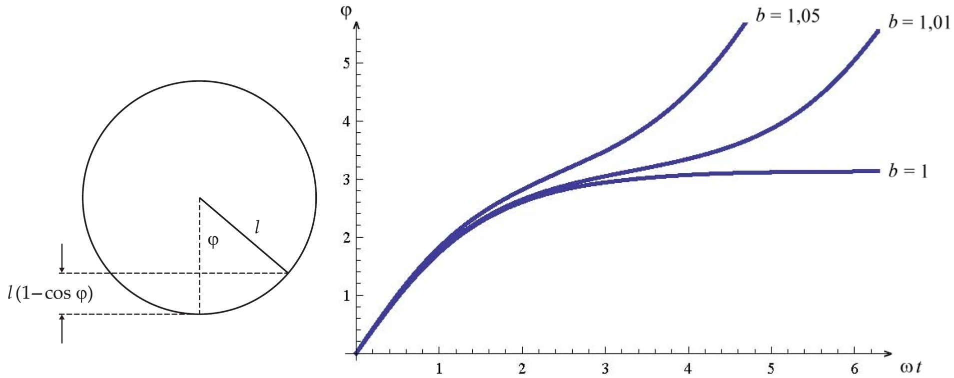
osi na drugem krajišču. Najprej drog izmaknemo za majhen odmik x iz stabilne lege (slika 4a). Komponenta teže $F = -mgx/l$ vrača utež v to lego. Iz Newtonovega zakona $F = md^2x/dt^2$ sledi enačba $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ z $\omega = \sqrt{g/l}$. Njena rešitev je sinusno nihanje: $x = x_0 \cos \omega t$, ki ustreza zahtevama, da je v času $t = 0$ odklon enak x_0 in hitrost enaka 0.



Slika 4. Zelo lahek drog z drobno utežjo na krajišču izmaknemo iz stabilne ravnovesne lege (a) in iz labilne ravnovesne lege (b). Komponenta teže v prvem primeru utež vrača v ravnovesno lego, v drugem pa ne. Zaradi podobnosti trikotnikov velja $F/(mg) = x/l$. Odklona sta narisana pretirano.

Nato opazujmo nihalo blizu labilne lege. Na utež deluje komponenta teže $F = mgx/l$ vstran od labilne lege, ko ga izmaknemo za majhen odmik x (slika 4b). Iz Newtonovega zakona sledi enačba $d^2x/dt^2 = \omega^2 x$. Njena rešitev $x = x_0 \operatorname{ch} \omega t$ ustreza zahtevama, da je v času $t = 0$ odklon enak x_0 in hitrost enaka 0.

Potem ko smo obdelali gibanje nihala okoli obeh ravnovesnih leg, obravnavajmo njegovo gibanje po enakem kopitu kot gibanje izstrelka proti Luni. Za ta namen določimo lego uteži na krožnici s polmerom l z odklonom φ od stabilne lege (slika 5 levo). Hitrost uteži je $v = l d\varphi/dt$ in njena kinetična energija $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(d\varphi/dt)^2$ ter potencialna energija $W_p = mlg(1 - \cos\varphi)$. Polna energija, preračunana na enoto mase $W/m = \frac{1}{2}v^2 + gl(1 - \cos\varphi)$, je konstantna. Če naj utež labilno lego doseže s hitrostjo 0, je v tej točki polna energija enaka potencialni energiji $W = 2mgl$. Tolikšna mora biti tudi začetna kinetična energija, tako da je začetna hitrost



Slika 5. Lego nihala na krožnici pri večjem odklonu opišemo z zasukom φ (levo). Odvisnost zasuka nihala φ od t za mejni primer in nekaj vrednosti parametra b (desno). Hitrost v nevtralni točki meri $v_1 = \sqrt{b^2-1}v_0$.

$v_0 = 2\sqrt{gl}$. Enačba gibanja se glasi:

$$\frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl(1+\cos\varphi) = 2gl\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,,$$

če nazadnje kot izrazimo z dvojnim polovičnim kotom. Korenjenje da $d\varphi/dt = 2\omega\cos\frac{1}{2}\varphi$. Tako dobimo

$$\omega t = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{4}(x+\pi)\right|.$$

V labilni legi pri $\varphi = \pi$ čas zrase čez vse meje.

Razmere okoli labilne lege raziščemo, če v integralu vstavimo $\varphi = \pi - \delta$ z odmikom od labilne lege $\delta \ll 1$. Z njim velja $\cos\frac{1}{2}\varphi = -\sin\frac{1}{2}\delta \approx -\frac{1}{2}\delta$. Tako smo naposled prišli do enačbe:

$$\int\frac{d\delta}{\delta} = \ln\delta - \text{konst.} = -\omega t$$

z rešitvijo $\delta \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ s $\tau = 1/\omega = \sqrt{l/g}$, ki spominja na enačbo (4) in njeno rešitev.

Zopet vzamemo malo večjo hitrost od v_0, to je bv_0, $b > 1$. V tem primeru sledi enačba $\frac{1}{2}(d\varphi/dt)^2 = 2\omega^2(b^2 - \sin^2\frac{1}{2}\varphi)$. Njeno rešitev izrazimo z eliptičnim integralom prve vrste $F(x,k) = \int_0^x dx/\sqrt{1-k^2\sin x}$ takole: $(1/b)F(\frac{1}{2}\varphi, 1/b) = \omega t$. V tem primeru lahko inverzno funkcijo zapišemo v zaključeni obliki z Jacobijevo amplitudo, za katero velja: če je $u = F(x, k)$, je $x = \mathrm{am}(u, k)$. Tako je $\varphi = 2\,\mathrm{am}(b\omega t, 1/b)$. Slika 5 (desno) ustreza sliki 2.

Za razpravo in koristne nasvete se zahvaljujem profesorju Antonu Ramšaku.

LITERATURA

[1] I. S. Grashteyn in I. M. Ryshik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego 1979, str. 81, 84 (2.267, 2.261, 2.266)

NOVE KNJIGE

Lars Lindberg Christensen: VELIKE OČI, ZAZRTE V NEBO (EYES ON THE SKIES), ESA, 2009, DVD, 68 minut.

Se še spomnite časov, ko so bili dokumentarci najboljše, kar je ponujal televizijski program? Kam so izginili? Ja, kam, na posebne kanale. Predvajajo jih dneve in dneve. Kanalov pa niti na prste ene roke ne moremo več prešteti. Pri tem zasičenju se pojavi težava. Čas je treba z nečim zapolniti, dobri dokumentarci pa ne rastejo na drevesih. Sicer pa so produkcijo vzeli v roke filmarji. Ti se spoznajo na posel! Iz „parkiranja“ čezoceanke tako naredijo polurni dokumentarec, kjer se isti kadri neštetokrat ponavljajo. Čeprav so razbiti z reklamnimi bloki, je to vseeno moteče. Pa tisto razvlečeno, umetno ustvarjanje napetosti. Ali bo ladji, ki krmari v pristanišče, uspelo zgrešiti zid za 200 metrov? To ni zanimivo; ustvarimo raje paniko, da pelje le za mišjo dlako stran od zidu in tudi posnemimo iz takega kota, da bo tako res videti. Ustvari se lažni vtis, da je vsako pristanje ladje prava mala avantura, kar pa seveda ni res.

Vse našteto: obilica, površnost, trivialnost, dramatiziranje … manjša užitek odkrivanja novega.

No, vse te navlake na DVD-ju *Eyes on the Skies* (v prevodu: Velike oči, zazrte v nebo), ki ga je ob mednarodnem letu astronomije pripravila Evropska vesoljska agencija (ESA), ne boste našli. Kar ponuja več od dejstev, je vrhunska estetika, zasanjan sprehod skozi čare astronomije.

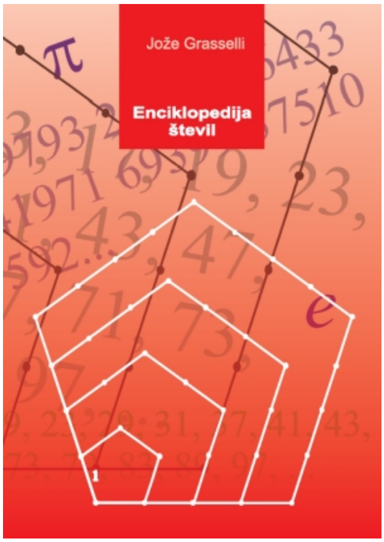
DVD je razdeljen na sedem nekoliko prepletenih poglavij, katerih naslovi z rahlo patetiko skrivajo njihovo vsebino. Na sploh je vznesen ton, ki pri naših strokovnih piscih ni v navadi, otežil slovenski prevod, ki pa sta ga strokovno korektno pripravila Andreja Gomboc in Bojan Kambič.

V poglavjih si lahko ogledamo kratko zgodovino astronomije ter teleskopov. Spoznamo, kako teleskopi delujejo, ter vidimo največje, najboljše, pa tudi tiste, ki jih raziskovalci še razvijajo. Zgodba se dotakne tudi tega, kar je očem skrito. Vse to je povezano z izvrstno grafiko, dobro glasbeno podlago in dih jemajočimi posnetki. Že samo ti, brez strokovne vsebine, bi bili dovolj, da si disk kdaj ogledamo. Vsebina na poljudni ravni je primerna za široko publiko (vključno z mladino). Nekaj drobnih težav s šumniki ne moti, ni pa nujno, da bo vsak predvajalnik kos dvostranskemu ploščku.

DVD lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 7,75 EUR.

Aleš Mohorič

Jože Grasselli: ENCIKLOPEDIJA ŠTEVIL, Matematika – fizika 45, DMFA–založništvo, Ljubljana 2009, 696 strani.



Najbrž bi se mnogi iz okolice moje generacije (letniki 1964 $\pm\, \varepsilon$), ki so poslušali predavanja iz splošne abstraktne algebre pri profesorju Grasselliju, strinjali z menoj, da je tista poglavja, ki so bila povezana s teorijo števil (pri tem predmetu seveda v obliki števnih podkolobarjev obsega $\mathbb{C}$), predaval s prav posebnim žarom. Čutili smo, da bi o njih želel povedati še mnogo več, če ga ne bi omejeval učni načrt, ki nas je vodil naprej k abstraktnim obsegom, matričnim kolobarjem in še dalje.

Zdaj, ko je naš priljubljeni profesor že upokojen, osvobojen skrbi naše generacije, ki se bolj ali manj spretno spotika med birokratskimi čermi bolonjske reforme, si je očitno vzel potreben čas in nam v obliki zajetne knjige povedal vse tisto, česar mu časovne omejitve takrat niso dopuščale.

Knjiga je napisana na zelo inovativen način, mislim da v Sloveniji take oblike pri matematičnem učbeniku še nihče ni uporabil. Osnovna struktura teksta je dejansko taka, kot jo običajno pričakujemo v knjigi z naslovom *Enciklopedija X* ali *Slovar Y*; v njej so abecedno urejena gesla. Delo se prične z geslom „abundantno število“ in konča na strani 688 z geslom „Zofijino praštevilo“. Domnevam, da večina bralcev OMF v tem trenutku (še!) ne ve, kaj ta dva pojma pomenita. Zdaj v mislih interpolirajte še nekaj sto gesel med oba omenjena ekstrema, poskusite si predstavljati, koliko kilogramov matematičnih revij bi morali prebrati, da bi našli še eno malo znano zanimivo dejstvo o svoji najljubši teoriji in na koncu napisali primerljivo delo (na primer *Enciklopedija matrik*?), pa vam bo jasna monumentalnost vsebine, ki jo skrivajo sicer skromne mehke platnice.

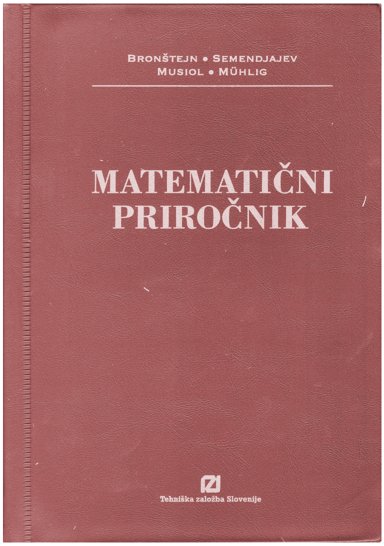
Po drugi strani delo profesorja Grassellija vsebinsko sploh ni podobno običajnim enciklopedijam (zbirki na hitro skupaj zmetanih površnih, deloma tudi netočnih razlag, namenjenih reševalcem križank), kajti razlaga vsebine je lokalno izomorfna klasičnim uvodnim učbenikom iz teorije števil. Knjiga vsebuje dokaze, izreke in predvsem veliko zanimivih primerov. Nekatera (redka) gesla sicer obsegajo samo nekaj vrstic, večina pa je mnogo obsežnejših. Če mislite, da veste o *kubu* vse (Jasno! To je pač en tak $x^3 \ldots$), boste po dvanajstih straneh razlage, ki jo temu geslu nameni naš profesor, spoznali, da se motite. Gesel, katerih vsebino lahko razume malo bolj zagret srednješolec, je veliko. Po drugi strani je na primer „Dedekindova vsota“ obdelana na povsem univerzitetnem nivoju, kar pa lahko zaradi samozadostnosti prezentacije posameznih gesel pri prvem branju enostavno izpustimo.

Smisel enciklopedične zasnove teksta se nam v polnosti razkrije, ko premišljamo o njegovi uporabnosti za srednješolske učitelje. Teorija števil je, poleg globokih teorij, povezanih z dokazom Fermatovega izreka, polna tudi drobnih (in malo znanih) zanimivosti, ki so idealne za samostojno delo boljših dijakov. Delo profesorja Grassellija vsebuje mnogo takih gesel in je lahko prava zakladnica idej za sposobnega mentorja matematičnega krožka. Mojih „Top 5“ (v stilu revije Bukla) izbir za dijaške projekte, po abecednem vrstnem redu, so naslednja gesla: deficientno število, Kaprekarjevo število, Metiusovo število, Nivenova števila, superbundantno število. Ker se je moje sodelovanje z novomeškim Klubom nadarjenih učencev žal končalo po mojem odhodu na Univerzo v Mariboru, njihovo realizacijo prepuščam zainteresiranim bralcem.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 30,39 EUR.

Borut Zalar

I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, G. Musiol in H. Mühlig: MATEMATIČNI PRIROČNIK, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2009, 1000 strani.



Leta 1963 smo dobili prvi slovenski prevod (prevajalec Albin Žabkar) Matematičnega priročnika avtorjev I. N. Bronštejna in K. A. Semendjajeva. Bil je sicer namenjen inženirjem in slušateljem tehniških visokih šol, toda pri nas so stekle ponudbe za nakup tudi po srednjih tehniških šolah in gimnazijah. Skoraj vsak dijak, ki mu matematika ni delala težav in ki je nameraval kasneje študirati na naravoslovnih in tehniških fakultetah, si ga je nabavil.

V tem starem priročniku, ki obsega 700 strani manjšega formata na zelo tankem papirju, je povprečen uporabnik tiste čase našel praktično vse, kar je potreboval. Ena od zelo prijetnih stvari v priročniku je zbirka integralov, tako da se človeku ni bilo treba mučiti z računanjem ravno vsakega malo težjega integrala po najbolj pogostih metodah: s substitucijo ali per partes. Poleg tega priročnik odlikuje obsežna zbirka tabel, skic, grafov, definicij in primerov, in to s skoraj vseh področij matematike, vključno z najbolj elementarno matematiko in geometrijo. Stvarno kazalo pa omogoča hitro iskanje po priročniku. Zato ni čudno, da je vsaka izdaja priročnika hitro pošla in ga je bilo treba v preteklih tridesetih letih velikokrat ponatisniti.

Razvoj matematičnih znanosti pa je z leti zahteval, da se Matematični priročnik prenovi. Za prenovo sta zaslužna G. Musiol in H. Mühlig iz Dresdna, ki sta kot redaktorja pripomogla k nastanku po snovi približno dvakrat obsežnejše knjige nekoliko večjega formata.

Novi priročnik je dopolnjen in predelan, snov v njem pa je tudi drugače razporejena glede na prvotno izvedbo. Vsebinsko je razdeljen na enaindvajset poglavij: Aritmetika, Funkcije in krivulje, Geometrija, Linearna algebra, Algebrske strukture, Diferencialni račun, Neskončne vrste, Integralni račun, Diferencialne enačbe, Variacijski račun, Integralske enačbe, Funkcionalna analiza, Vektorska analiza in teorija polja, Funkcijska teorija, Integralske transformacije, Verjetnostni račun in statistika, Dinamični sistemi in kaos, Optimizacija, Numerična matematika, Algebrski računalniški sistemi ter Tabele.

V priročniku je novih kar sedem poglavij, ki so jih napisali nemški profesorji in inženirji (J. Brunner, M. Weber, I. Steinert, V. Reitmann in G. Flacha), in sicer: Algebrske strukture, Variacijski račun, Integralske enačbe, Funkcionalna analiza, Dinamični sistemi in kaos, Optimizacija ter Algebrski računalniški sistemi. Delno ali v celoti so predelana poglavja Geometrija, Eliptične funkcije in Numerična matematika (H. Nickel, N. M. Fleischer in I. Steinert). Poglavje Numerična matematika obravnava tudi reševanje numeričnih problemov z računalnikom, poglavje Algebrski računalniški sistemi pa uporabo Mathematice in nekaterih drugih podobnih sistemov pri reševanju matematičnih problemov. En razdelek tega poglavja je posvečen grafiki, v glavnem načrtovanju krivulj in ploskev.

V zadnjem poglavju, Tabele, so zbrane naravne konstante, razvoji funkcij v potenčne in Fouriereve vrste, nedoločeni in določeni integrali, tabele nekaterih specialnih funkcij, integralskih transformacij in verjetnostnih porazdelitev. Priročnik se konča s seznamom literature za nadaljnji študij, vključno z nekaterimi deli domačih avtorjev, razdeljen pa je po ustreznih poglavjih, in seveda s stvarnim kazalom.

Priročnik je, prav tako kot njegov manjši predhodnik, bogato opremljen z ustreznimi slikami, manjšimi sprotnimi tabelami in rešenimi zgledi, poglavja pa so logično in tematsko razdeljena na razdelke. Odlikujejo ga nazornost, praktičnost, razumljivost, natančnost in ravno pravšnja strogost.

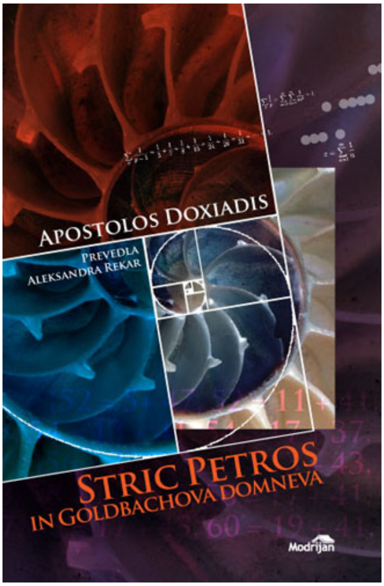
Seveda so priročnik v slovenščino prevedli sami domači matematiki (Janez Barbič, Gregor Dolinar, Borut Jurčič - Zlobec in Neža Mramor - Kosta) in s tem dobro opravili zares veliko in zahtevno delo. Priročnik je stavljen z računalniškim urejevalnikom besedil LaTeX.

Obsežen, temeljit, dobro in natančno napisan matematični priročnik, kljub temu da je dandanes na voljo več drugih odličnih matematičnih priročnikov in računalniških programov ter obilica tovrstnih besedil na svetovnem spletu, toplo priporočamo vsem, ki se pri svojem šolanju in v poklicu ukvarjajo z matematiko, to je študentom, profesorjem, inženirjem in raziskovalcem.

Po nekaj letih bo v kratkem na voljo ponatis prenovljenega priročnika. Naročite ga lahko **v prednaročilu do 22. novembra** pri DMFA–založništvo po dodatno znižani članski ceni 34,99 EUR.

Marko Razpet

Apostolos Doxiadis: STRIC PETROS IN GOLDBACHOVA DOMNEVA, Modrijan, Ljubljana 2009, 176 strani.



Pred nami je svojevrsten roman, v katerem nastopa nekaj pravih, slavnih matematikov, ki so delovali v 19. in 20. stoletju na področju matematične logike, osnov matematike in teorije števil. Precej dogodkov v zvezi z njimi je sicer posrečeno izmišljenih, posredno pa spoznamo, kako so razmišljali, s čim so se ukvarjali, pa tudi njihove osebnostne značaje.

Rdeča nit romana je *Goldbachova domneva*, s katero se vsak po svoje ubadata stric Petros, nekoč priznani profesor matematike, in njegov nečak, študent matematike, ki zgodbo pripoveduje v prvi osebi. Leta 1742 je pruski matematik Goldbach pisal Eulerju, da domneva, da je vsako sodo število, večje od 2, vsota dveh praštevil. Te domneve vse do danes še nikomur ni uspelo dokazati. Stric Peter je to poskušal in domnevi posvetil ogromno časa, vse do svojega tragičnega konca, ne da bi vedel, kaj so na tem področju naredili drugi matematiki, in ne da bi poznal Gödlova spoznanja, po katerih se domneve morda ne da niti potrditi niti ovreči. Še več, v dokazovanje domneve je skušal vpreči tudi nečaka.

Roman je vsekakor vredno prebrati. Opozoriti pa je treba, da so v knjigi vsaj trije spodrsljaji. Na strani 45 je znani francoski matematik *Lagrange* zapisan napačno kot *Langange*, na strani 107 je omenjeno, da je znani indijski matematik Šrinivasa Ramanudžan odkril, da je število 1729 zanimivo zato, ker je najmanjše naravno število, ki se da na dva načina izraziti kot vsota *dveh kvadratov*, moralo pa bi očitno pisati *dveh kubov*. V opombi pod črto pa piše pravilno: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$. Na strani 136 je napačno navedeno, da je bil nemški matematik Georg Cantor *oče teorije vrst*. Pravilno je *oče teorije množic*.

Marko Razpet

SPOŠTOVANI BRALCI

V zadnjih letih smo v uredništvu Obzornika veliko premišljevali o tem, kako vsebino naše revije narediti čim bolj dostopno in zanimivo za vas, naše bralce. Kot rezultat smo uvedli nekaj novih pristopov in tem. Ker so odzivi bralcev na spremembe zelo redki, v uredništvu ne vemo, ali gremo v pravo smer. Zato vas prosimo, da si vzamete nekaj minut časa in izpolnite spodnji vprašalnik ter nam izpolnjenega pošljete v priloženi kuverti (poštnina je že plačana). S tem boste pripomogli, da vam bo revija postala bolj všeč. Upamo, da jo boste potem raje brali. Že vnaprej hvala za vaš trud.

1. Koliko berete Obzornik?
   (a) ga sploh ne odprem
   (b) ga samo malo prelistam
   (c) preberem manj kot polovico prispevkov
   (d) preberem več kot polovico prispevkov
   (e) preberem praktično vse prispevke

2. Katere prispevke preberete (obkrožite lahko več možnosti)?
   (a) vesti in društvena obvestila
   (b) prispevke o šoli in poučevanju
   (c) matematične članke
   (d) fizikalne članke
   (e) rubriko Nove knjige
   (f) intervjuje

3. Kakšen se vam zdi nivo znanstvenih člankov?
   (a) premalo zahteven
   (b) ustrezen
   (c) preveč zahteven

4. Kakšno se vam zdi razmerje med različnimi prispevki?
   (a) ustrezno
   (b) moralo bi biti več novic in obvestil
   (c) moralo bi biti več člankov o poučevanju in šolski praksi
   (d) moralo bi biti več znanstvenih člankov
   (e) moralo bi biti več predstavitev novih knjig
   (f) moralo bi biti več intervjujev

(g) moralo bi biti več ______________________________

____

5. Ali se morda spomnite kakšnih prispevkov v zadnjih letih, ki so vam bili všeč oziroma so se vam zdeli še posebej dobri?
   (a) NE
   (b) DA (za vsak prispevek navedite približen naslov in/ali ime avtorja)

____

____

____

____

6. Ali se morda spomnite kakšnih prispevkov v zadnjih letih, ki vam niso bili všeč ali se vam niso zdeli primerni za Obzornik?
   (a) NE
   (b) DA (kaj vam pri teh prispevkih ni bilo všeč) ______________

____

____

____

____

7. Kaj menite o formatu in grafični podobi Obzornika?
   (a) revija je ustreznega formata in prijetna za branje
   (b) revija bi morala biti v celoti barvna
   (c) revija je povprečne kvalitete za tovrstno literaturo
   (d) format revije je slab in deluje zastarelo

8. Drugi komentarji, pripombe in predlogi za izboljšave:

____

____

____

____

____

ŠESTNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 25. in 30. julijem 2009 je bilo v Budimpešti šestnajsto tekmovanje študentov matematike. Prvega tekmovanja leta 1994 v Bolgariji se je udeležilo le nekaj deset študentov iz vzhodnoevropskih držav. Predlani je tekmovalo 249 študentov, lani 283, letos pa že 347 študentov s skoraj vseh celin. Tekmovanje kljub zahtevnim nalogam in visokim standardom pravičnosti pri popravljanju ostaja zelo prijetno in sproščeno. Tudi letos ni manjkalo nogometno tekmovanje, kjer so naši študentje v hudi konkurenci zmagali.

Slika 1. Slovenska ekipa: Peter Muršič, Gašper Zadnik, David Gajser, Urban Jezernik in Špela Špenko.

Slovensko ekipo so sestavljali David Gajser, Urban Jezernik, Špela Špenko in Gašper Zadnik z Univerze v Ljubljani in Peter Muršič z Univerze na Primorskem. Kljub zelo težkim nalogam so dosegli odlične rezultate: Urban

Jezernik in Špela Špenko sta dobila drugo nagrado, David Gajser in Gašper Zadnik tretjo nagrado, Peter Muršič pa je dobil pohvalo.

Študentje so tekmovali in bivali v zelo lepem in funkcionalnem kampusu budimpeštanske univerze Eötvös Loránd ob zahodnem bregu Donave.

Letos se je število tekmovalcev bistveno povečalo, za popravljanje pa smo imeli vodje ekip na voljo en dan manj, zato smo zmanjšali število nalog. Tako so študentje dva zaporedna dneva reševali vsak dan po pet (namesto šest) nalog. Naloge so točkovno enakovredne, njihova teža pa praviloma narašča z zaporedno številko. Tudi letos so se le redki prebili čez četrto nalogo. Prvouvrščeni Aleksander Efimov iz Moskovske državne univerze Lomonosov je zbral 80 % vseh točk, polovico točk pa je zbralo 82 (od 347) študentov. Aleksander je zmagal že tretjič zapored, leta 2006 pa se je kot bruc uvrstil na drugo mesto.

Zelo veliko informacij o letošnjem in o preteklih tekmovanjih, vključno z nalogami, rešitvami in rezultati, lahko najdete na spletni strani organizatorja profesorja Johna Jayna iz University Collega v Londonu: `http://www.imc-math.org.uk/`.

Vodje ekip nekaj mesecev pred tekmovanjem organizatorju predlagamo naloge. Nato ožja skupina izkušenih bivših tekmovalcev izbere približno petdeset najbolj primernih. Dan pred tekmovanjem na skoraj celodnevnem sestanku z glasovanjem izberemo naloge za oba dneva.

Tekmovanje se pravilom začne z lažjo ogrevalno nalogo. Bralce Obzornika vabim, da preizkusijo svoje znanje analize in poskušajo odgovoriti na naslednji vprašanji:

Prvi dan, prva naloga: *Naj bosta $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, za kateri velja $f(q) \leq g(q)$ za vsako racionalno število q. Ali od tod sledi, da je $f(x) \leq g(x)$ za vsak realen x, če dodatno privzamemo, da sta funkciji f in g*

(a) nepadajoči?

(b) zvezni?

Pred popravljanjem se vodje ekip razdelimo v skupine po nalogah in poskušamo po pregledu manjšega vzorca nalog določiti orientacijski točkovnik. Vsako nalogo neodvisno pregledata vsaj dve vodji ekip, ki morata na koncu uskladiti končno oceno. Če pride do pritožb, je predpisan poseben postopek, ki zagotovi zares pravično oceno.

Vsako leto nas presenetijo nekatere zelo originalne rešitve, ki pa pogosto niso povsem do konca dodelane. Ker gre za zelo dobre študente, je včasih zelo težko ločiti študente, ki z besedami „brez škode za splošnost lahko privzamemo, da ...“ zaobidejo premislek, ki ga ne znajo narediti, in študente,

Slika 2. Nagrade so podelili med zelo prijetno vožnjo z ladjo po Donavi.

ki zelo dobro poznajo konkretno področje in so zato takšni premisleki rutinski in odveč. Letos nam je pri popravljanju delala hude težave naslednja razmeroma enostavna naloga iz linearne algebre:

Prvi dan, druga naloga: *Naj bodo A, B in C kvadratne realne matrike enake velikosti, pri čemer je matrika A obrnljiva. Če je $(A-B)C = BA^{-1}$, pokaži, da je $C(A-B) = A^{-1}B$.*

Uradna rešitev upošteva dejstvo, da je levi inverz matrike hkrati tudi desni inverz. Če enakosti $(A-B)C = BA^{-1}$ na obeh straneh prištejemo $AA^{-1} = I$, dobimo ekvivalentno enakost $(A-B)(C+A^{-1}) = I$, zato je tudi $(C+A^{-1})(A-B) = I$. To pa je bilo treba pokazati.

Več študentov je napisalo, da lahko brez škode za splošnost privzamemo, da so kakšne od matrik v nalogi simetrične ali obrnljive, prav nobeden pa ni tega dokazal. S tem so si zelo olajšali nalogo. Kar nekaj časa nam je vzelo, da smo izdelali dokaz (ki je težji kot rešitev naloge), kjer zaporedje obrnljivih matrik, ki ustreza dani enakosti, konvergira k neobrnljivi matriki, ki izpolnjuje iskano zvezo. Prav tako smo se zelo težko odločili, kako oceniti rešitve, ki privzamejo, da je kakšna od dejansko obrnljivih matrik (recimo $A - B$ ali $C + A^{-1}$) obrnljiva.

Pogosto se uštejemo tudi pri težavnosti nalog. Letos tako noben od študentov ni prišel niti blizu rešitvi naslednje naloge:

Prvi dan, četrta naloga: *Naj bo $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinom s kompleksnimi koeficienti in $1 = c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$ konveksno zaporedje realnih števil (to pomeni, da je $2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$). Pokaži, da za polinom $q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + \cdots + c_n a_n z^n$ velja*

$$\max_{|z|\leq 1} |q(z)| \leq \max_{|z|\leq 1} |p(z)| \,.$$

Meni osebno je bila najbolj všeč naslednja naloga:

Drugi dan, tretja naloga: *Naj bosta A in B kvadratni kompleksni matriki, za kateri velja $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Pokaži, da za dovolj veliko naravno število k velja $(AB - BA)^k = 0$.*

Naša študentka Špela Špenko je čudovito in zelo kratko rešitev dobila s pomočjo znanih dejstev o nilradikalih.

Ena od lepših uradnih rešitev pa uporabi le znanje linearne algebre: Najprej pokažimo, da komutator $X = AB - BA$ komutira z A:

$$AX - XA = (A^2B - ABA) - (ABA - BA^2) = A^2B + BA^2 - 2ABA = 0 \,.$$

Ker je

$$X^{m+1} = X^m(AB - BA) = A(X^m B) - (X^m B)A \,,$$

je sled matrike X^{m+1} enaka 0 za vse $m \geq 0$. Sledi matrik $X, X^2, \ldots, X^n$ so vsote ustreznih potenc lastnih vrednosti matrike X. Zato morajo biti vse lastne vrednosti ničelne in matrika X je nilpotentna.

Marjan Jerman

MATEMATIČNO RAZISKOVANJE NA MARSU

V okviru DMFA Slovenije smo poleti že četrto leto zapored organizirali MARS – MAtematično Raziskovalno Srečanje, namenjeno širšemu krogu srednješolcev. Srečanje je potekalo od 16. do 22. avgusta na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije v Kopru. Vsebinski poudarek srečanja je na ustvarjalnem raziskovanju matematičnih problemov in njihovega ozadja, ne pa na tehnikah reševanja tekmovalnih nalog.

V pestrem programu je sodelovalo okoli 25 dijakov iz vse Slovenije, ki so v okviru letošnje vodilne teme „Oblika prostora“ sodelovali v delavnicah in pripravili nekaj krajših skupinskih projektov o krivuljah, fraktalih, neevklidski geometriji ter večrazsežnih objektih. Pri izvedbi delavnic so sodelovali Uroš Kuzman, Gašper Zadnik, Dejan Širaj, David Gajser, Nino Bašič in Maja Alif, razen prvega vsi še študentje matematike na FMF Univerze v Ljubljani.

Kot vsako leto pa je krajša predavanja o vlogi matematike v sodobni družbi za dijake pripravilo tudi nekaj uglednih slovenskih raziskovalcev: prof. dr. Sandi Klavžar (Hanojski stolpi), doc. dr. Emil Žagar (Bezierjeve krivulje), doc. dr. Martin Milanič (Matematika v biologiji: iskanje popolnih filogenetskih dreves) in doc. dr. Aljaž Ule (Teorija iger: matematika strateškega odločanja).

Tudi letos je MARSovske strokovne aktivnosti spremljal domiseln družabni program, ki se je začel s spoznavnim večerom, imenovanim Vzlet. Na Olimpijskem večeru so svoje prigode in vtise s tekmovanj predstavili udeleženci štirih letošnjih mednarodnih olimpijad: matematične (Anja Komatar, Matjaž Leonardis, Matej Aleksandrov), fizikalne (Filip Kozarski), računalniške (Matjaž Leonardis, Žiga Ham, Matej Aleksandrov, Nace Hudobivnik) in lingvistične (Anja Komatar, Katja Klobas, Boris Mitrović). Veliko MARSovsko pustolovščino, zabavno orientacijsko tekmovanje z matematičnimi ugankami, so dijaki začeli s fizikalnimi poskusi v koprskem Centru eksperimentov, končali pa na ukrivljeni ploskvi velikega tobogana v vodnem parku. Obiske plaže v prostem času so dijaki popestrili z igrami za utrjevanje moštvenega duha, skoraj vsak večer pa so se pozno v noč zabavali z namiznimi strateškimi igrami od šaha do katancev. Ko so v petek zjutraj končali s pripravo projektov, so si za oddih v kinu ogledali še film „21 – Razpad Las Vegasa“, hollywoodsko interpretacijo zgodbe o skupini študentov matematike, ki je uspešno goljufala velike igralnice.

Zares pestro dogajanje na MARSu je obširneje predstavljeno na spletni strani `http://mars.famnit.upr.si/`. Kot vodja programa pa lahko rečem, da se MARSa večinoma udeležujejo dijaki, ki so kot z drugega planeta: ustvarjalni, polni energije, radovednosti, matematičnih idej in zabavnih domislic, zato je delo z njimi nadvse prijetno. Obenem bi se za gostoljubje zahvalil prof. dr. Draganu Marušiču, dekanu Fakultete za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije v Kopru, kjer je potekala večina strokovnih dejavnosti. MARS 2009 sta finančno podprla tudi Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo ter Študentska organizacija Univerze v Ljubljani, končal

(foto: Jernej Filipčič)

pa se je v soboto, 22. avgusta, ko so se predstavitve dijaških projektov z zanimanjem udeležili tudi številni starši udeležencev.

Boštjan Kuzman

MATEMATIČNE NOVICE

Nagrada za najboljši članek iz Uporabne linearne algebre

To nagrado (SIAG/LA Prize) podeljuje Sekcija za linearno algebro znane organizacije SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) vsako tretje leto. Letos sta jo dobila profesor dr. **Zlatko Drmač** z Univerze v Zagrebu in zaslužni profesor na Fernuniversität Hagen v Nemčiji dr. **Krešimir Veselić**, in sicer za članka [1, 2] o novem Jacobijevem SVD algoritmu. Njuna metoda je implementirana v knjižnici LAPACK [3] programov iz Numerične linearne algebre. Profesor Veselić je večkrat gostoval v Ljubljani in ima skupen članek s prof. dr. Antonom Suhadolcem. Ob sprejemanju čestitk pa se je takole hvaležno spomnil pokojnega profesorja Egona Zakrajška:

Sicer pa ne skrivam in zmeraj poudarjam, da sem za Jacobijevo metodo prvič slišal od ***Egona Zakrajška****, ki je okrog leta 1971 – kot izpit iz Numerične analize v Zagrebu – imel briljantno predavanje o tej metodi in me je navdušil tako za to metodo kot tudi za numerično matematiko. Pozneje sta mi on in Zvonimir (Bohte) svetovala in pomagala. Vendar, če ne bi bilo Egona, bi moja orientacija bila povsem drugačna in ne bi bilo „zagrebške šole“ za Jacobijevo metodo.*

Simulacija snežink

Na domači strani Ameriškega matematičnega društva (AMS) imamo tudi strani, posvečene matematičnim upodobitvam [4]. Zadnji prispevek obravnava simulacijo snežink. Napravila sta jo David Griffeath, profesor na University of Wisconsin-Madison, in **Janko Gravner**, profesor na Kalifornijski univerzi v Davisu. Janko Gravner je diplomiral in magistriral (1985) v Ljubljani, doktoriral je leta 1991 na University of Wisconsin-Madison. Od leta 1992 je v Davisu, vendar kot mentor pri doktoratih in tudi drugače aktivno sodeluje s slovensko matematiko.

Ob tem se spomnimo, da je pred nekaj leti fizikalni model rasti snežink privlačno predstavil sedanji dekan Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani prof. dr. Andrej Likar v reviji Presek [5].

LITERATURA

[1] Z. Drmač in K. Veselić: *New fast and accurate Jacobi SVD algorithm: I.*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29** (2008), str. 1322–1342.

[2] Z. Drmač in K. Veselić: *New fast and accurate Jacobi SVD algorithm: II.*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29** (2008), str. 1343–1362.

[3] Linear Algebra PACKage: *LAPACK 3.2*, 2008, `http://www.netlib.org/lapack/lapack-3.2.html`.

[4] Matematične podobe: *Mathematical Imagery*, AMS, 2009, `http://www.ams.org/mathimagery/`.

[5] A. Likar: *Kako rastejo snežinke?*, Presek **32** (2004/2005) 4, str. 15–19.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2009
Letnik 56, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Zaporedje slik kaže od desne proti levi Luno med njenim mrkom 3. marca 2007. Med mrkom je Luna zasijala v rožnati zarji, ki jo je osvetlila z Zemlje. Čeprav Zemlja med mrkom zasenči Luno pred neposredno svetlobo s Sonca, Luno obsije svetloba, ki se lomi v Zemljini atmosferi. Modra svetloba se v atmosferi sipa močneje in bela svetloba je pri poševnem vpadu skozi debelo plast zraka videti rdeča, tako kot jutranja ali večerna zarja. Na desnih dveh slikah rožnate svetlobe ni videti, ker je mnogo šibkejša od bele, ki vpada naravnost s Sonca (foto: Aleš Mohorič). Glej članek na strani 172.