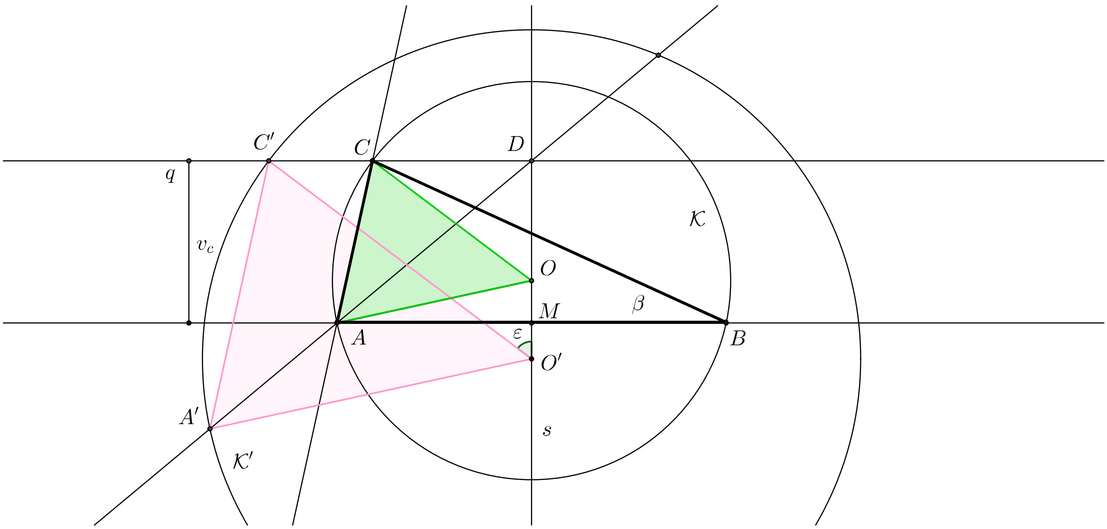
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2017
Letnik 64
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 64 • ŠT. 5 • STR 161-200 • SEPTEMBER 2017

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2017, letnik 64, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PO SLEDEH NEKE GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A55, 51M04, 51M15

V prispevku obravnavamo nekatere geometrijske konstrukcije trikotnika z dano osnovnico c, višino v_c nanjo in razliko $\alpha - \beta$ kotov ob osnovnici. Nalogo je Josipu Plemlju dal leta 1891 njegov profesor matematike Vincenc Borštner na ljubljanski gimnaziji. Plemelj je nalogo rešil na originalen način.

ON THE TRACKS OF A GEOMETRIC CONSTRUCTION

In this contribution we discuss certain geometric constructions of a triangle with a given base c and altitude h_c to the base, and the difference $\alpha - \beta$ between the angles at the base. The problem was posed in the year 1891 to Josip Plemelj by his mathematics teacher Vincenc Borštner in secondary school in Ljubljana. Plemelj has solved the problem in an original way.

Uvod

Ob okroglih obletnicah slavnih matematikov se po navadi znova poveča zanimanje zanje. Dne 22. maja 2017 smo v Plemljevem seminarju na Jadranski ulici 19 v okviru Seminarja za zgodovino matematičnih znanosti skromno počastili točno 50. obletnico smrti našega velikega matematika akademika prof. Josipa Plemlja (1873–1967). V ta namen smo povabili prof. Antona Suhadolca, enega izmed redkih še živečih Plemljevih študentov, da nam je povedal nekaj iz življenja in dela našega svetovno znanega matematika. Prof. Suhadolc je pred leti urejal Plemljevo pisno zapuščino, ki je sedaj shranjena v Arhivu Republike Slovenije (ARS) v Ljubljani. Ob tem zahtevnem in hvalevrednem delu je odkril marsikaj zanimivega, kar pred desetletjem še ni bilo splošno znano, predvsem o težavah s pridobivanjem profesorjev fizike v prvih letih po ustanovitvi ljubljanske univerze leta 1919. Njen prvi rektor je bil namreč ravno prof. Plemelj. Čeprav je imel možnosti, da bi svoje znanstveno delo nadaljeval na kakšni že utečeni univerzi, se je raje posvetil ljubljanski, na kateri je dolga leta predaval matematiko bodočim profesorjem matematike in fizike ter inženirjem, in sicer vse do upokojitve leta 1957. Številni Plemljevi študentje so ostali tudi na visokih in višjih šolah, napredovali v profesorje in nadaljevali s širjenjem matematičnega znanja. V glavnem je vse, kar je o prof. Plemlju povedal prof. Suhadolc, zapisano v članku [10]. Še več pa je o prof. Plemlju in njegovem delu zapisal njegov najboljši študent, akademik prof. Ivan Vidav (1918–2015) v [11].

Kot dijak ljubljanske klasične gimnazije se je Plemelj vnaprej sam naučil toliko matematike, da je lahko inštruiral dijake višjih letnikov, zlasti maturante. Tako se je laže spopadal z revščino, ki so jo tolkli v njegovi družini. Ni pa ostal le pri gimnazijski matematiki, posegel je tudi po višji. Plemljev profesor je bil Vincenc Borštner (1843–1917), ki je spoznal in spoštoval njegovo nadarjenost za matematiko. Zato je Plemelj zlahka nadaljeval študij matematike na Dunaju.

Ob tej priložnosti se spodobi, da navedemo nekaj osnovnih, manj znanih podatkov o Vincencu Borštnerju. Z vztrajnim iskanjem se jih najde na svetovnem spletu. Rodil se je 8. januarja 1843 v Lažišah, vasici, ki sedaj spada pod občino Laško. Gimnazijo je obiskoval v Celju in Mariboru, nato je študiral na graški univerzi. Leta 1870 je bil imenovan za asistenta za višjo matematiko in fiziko na graški tehniški visoki šoli. Obenem je poučeval kot učiteljski kandidat na neki graški gimnaziji, od 1871 pa nadaljeval s pedagoškim delom na celovški in ljubljanski gimnaziji. V Ljubljani se je prof. Borštner na lastno željo upokojil leta 1903. Umrl je pred sto leti, 31. maja 1917 v Ljubljani.

V Celovcu je 1875 objavil razpravo *Zur Theorie der Potenzen von Kreisen und Kugeln (O teoriji potenc krogov in krogel).* Borštner je objavljal svoje strokovne prispevke tudi v celovškem *Kresu*, leposlovnem in znanstvenem listu, v katerem je na primer leta 1881 objavil v treh nadaljevanjih prispevek *Spektralna analiza kot pripomoček v astronomiji*, naslednje leto pa *O telegrafičnih vremenskih poročilih*, prav tako v treh nadaljevanjih.

Pisal je tudi ocene knjig, na primer leta 1881 *Oko in vid* Jakoba Žnidaršiča (1847–1903) in pozneje dveh predelanih Močnikovih učbenikov za aritmetiko in geometrijo. Baje je Plemelj kot dijak rad prebiral Borštnerjeve astronomske prispevke v Kresu, zato ni čudno, če se je navduševal nad astronomijo.

Prof. Borštner je prišel v našo zgodovino matematike morda predvsem zaradi **konstrukcijske naloge**, ki jo je narekoval iz neke zbirke mlademu petošolcu Plemlju leta 1891:

(A) Konstruiraj trikotnik, če poznaš stranico c, višino v_c in razliko kotov $\alpha - \beta$.

Pri tem vzamemo, da je $\alpha > \beta$, ker je za $\alpha = \beta$ naloga trivialna. Seveda je pri tem mišljena klasična konstrukcija, samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Plemelj je nalogo rešil, najprej analitično, nato pa še konstrukcijsko v veliko profesorjevo zadovoljstvo. Rešitev sicer ni bila taka, kot je bila v zbirki in kakršno je pričakoval profesor. Vsaj dve rešitvi, drugačni od Plemljeve dijaške, pa sta bili znani že vsaj 60 let pred tem dogodkom, kot bomo videli pozneje. Plemelj je o tej nalogi še večkrat razmišljal, zlasti med novoletnimi počitnicami, in našel več drugačnih konstrukcij. Sicer pa je znano (glej na primer [11]), da se je prof. Plemelj ukvarjal s težkimi problemi v teoriji potenciala, diferencialnih in integralskih enačb, analitičnih funkcij ter algebri in teoriji števil. Pri prebiranju virov v zvezi z nalogo (A) pa naletimo na nekaj težav in nejasnosti.

Ni znano, ali je prof. Plemelj svojo konstrukcijo trikotnika pred letom 1949 kje javno predstavil. Zgodilo pa se je, da je novembra tega leta na Bledu potekal 1. kongres Zveze jugoslovanskih društev matematikov, fizikov in astronomov, kjer je Plemelj kot domačin imel govor o svojem življenju in delu. Ob tej priložnosti je pokazal tri konstrukcije svojega trikotnika: dve lastni in tisto iz Borštnerjeve zbirke. Prispevek s konstrukcijami vred je bil objavljen v Beogradu leta 1951 v zborniku kongresa, v Ljubljani pa šele 101 leto po Plemljevi dijaški rešitvi, to se pravi leta 1992, in sicer v Obzorniku za matematiko in fiziko (glej [7]), kar ni nič čudnega, saj v času kongresa v Sloveniji še nismo imeli matematične strokovne revije, kaj šele znanstvene. Imeli smo pa *Proteus*, ilustriran časopis za poljudno naravoslovje. V času kongresa je izhajal njegov 12. letnik, njegov dolgoletni urednik pa mu je bil prof. Lavo Čermelj (1889–1980). Čermelj je v Proteus vpeljal rubriko *Za bistre glave*, v kateri je postavljal vprašanja z različnih področij naravoslovja, fizike in matematike, v naslednjih številkah pa je objavljal in komentiral odgovore bralcev. Ko je Čermelj izvedel, da je prof. Plemelj na blejskem kongresu govoril tudi o konstrukcijski nalogi (A), je takoj v rubriki *Za bistre glave* objavil *Vprašanje št. 6* (več v [3]). To je verjetno naredil z namenom, da bi bralci našli še kakšno rešitev. Zapisal je, da je sam Plemelj že našel *kakih dvajset* različnih rešitev. Najprej se je verjetno na urednikovo prošnjo odzval sam prof. Plemelj in v Proteus poslal tri rešitve iz svoje zbirke: tisto iz Borštnerjeve zbirke in dve svoji, od katerih je zadnja tista iz njegovih dijaških let, pri kateri si je pomagal s trigonometrijo. Vse so bile objavljene v [8]. Kot kaže, je to bila prva objava njegovih trikotnikov v tiskani obliki. Prispele so tudi rešitve nekaterih bralcev, ki pa so bile pomanjkljive. Ing. Mitja Brodar, ki je našel pravilno rešitev, pa je bil prepozen in je prišel na vrsto v naslednji številki Proteusa, to je v [2]. Zanimanje za konstrukcijo še ni upadlo, kajti bralec Ivan Munda je poslal še eno pravilno rešitev, ki je pristala v [6]. Še nekaj bralcev je poslalo rešitve, ki pa so bile pomanjkljive in so zato ostale neobjavljene. Urednik je dopisal, da so vse pravilne rešitve bralcev že v Plemljevi zbirki. Tako je Proteus odigral pomembno vlogo tudi na področju matematike.

Toda na omenjeni blejski konferenci je prof. Plemelj povedal, da je sam našel še *devet* različnih rešitev, zadnjo, kot je sam dobesedno zapisal v [7], *v noči 1. januar 1940, po Silvestru 1939.* Poleg teh je dve rešitvi dobil od drugod. Potožil pa je tudi, da nima naslova Borštnerjeve zbirke nalog, ker si ga ni zapomnil. Tako zbirko sta mu pokazala v Černovicah, kjer je služboval kot profesor matematike, dva študenta. V njej je bila tudi omenjena naloga iz Borštnerjeve zbirke. Žal si naslova te zbirke ni zapisal. Tako ostane odprto vprašanje, katero zbirko je uporabljal prof. Borštner. Pač pa je prof. Plemelj na ljubljanski klasični gimnaziji našel Wiegandovo knjigo [12] z geometrijskimi nalogami. V [7] je v njenem naslovu uporabil izraz *Obergymnasien (višje gimnazije)* namesto *höhere Lehranstalten (višje učne zavode)*, kar je nekoliko oteževalo iskanje po svetovnem spletu. S pravilnim naslovom pa Wiegandovo knjigo zlahka najdemo celo v elektronski obliki. O avtorju Augustu Wiegandu ne vemo veliko, znano pa je, da je leta 1845 poučeval matematiko na realki v nemškem mestu Halle ob Saali. V tem mestu je od leta 1869 deloval Georg Cantor (1845–1918), *oče teorije množic*. Wiegandova zbirka [12] iz leta 1865 vsebuje raznovrstne konstrukcijske naloge z obrazložitvami in rešitvami za trikotnike, štirikotnike in krožnice. V njej najdemo na strani 147 nalogo:

(B) Konstruiraj trikotnik, če poznaš kotno simetralo iz enega oglišča, iz drugega pravokotnico nanjo, v tretjem oglišču pa kot.

Za to nalogo prof. Plemelj v [7] pove, da je povezana z nalogo (A) in da je dobil novo, prav lepo konstrukcijo.

Ko iščemo knjige, mimogrede najdemo tudi kakšno, ki je nismo pričakovali. Tako smo naleteli na obsežno zbirko konstrukcijskih nalog [4] z obrazložitvami in rešitvami. Zbirka je izšla v letih 1831 in 1832 v dveh delih na 860 straneh, v vsakem so dodane izvedene geometrijske konstrukcije na posebnih listih na koncu. V obeh knjigah je skoraj 2300 nalog. Že v prvem delu je na strani 136 rešena naloga (A) z natančno razlago. Uporabljena je metoda dopolnitve trikotnika v enakokrak trapez, kar najdemo v bistvu tudi v [2, 7]. V drugem delu spet najdemo na strani 298 pod zaporedno številko 1720 nalogo (A) z analizo in rešitvijo, ki se opira na *izrek o potenci točke glede na krožnico.* Popolnoma možno je, da so poznejše zbirke nalog črpale primere ravno iz te knjige, morda tudi Borštnerjeva zbirka.

Avtorja zbirke [4] sta Hermann pl. Holleben in Paul Gerwien, v času njenega izida polkovnika pruske vojske in učitelja v kadetskem korpusu. Gerwien je leta 1833 v reviji, ki jo je ustanovil August Leopold Crelle (1780–1855) in izhaja še danes pod imenom *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, objavil članek, v katerem dokaže izrek, da lahko poligona, ki imata enaki ploščini, z ravnimi črtami razrežemo na iste poligone. Izrek po Farkasu Bolyaiju (1775–1856), ki je izrek dokazal leta 1833, in Gerwienu imenujemo *Bolyai–Gerwienov izrek*. Kot poseben primer lahko kvadrat ali njemu ploščinsko enak enakostranični trikotnik razrežemo na sedem trikotnikov, iz katerih lahko sestavimo oba lika.

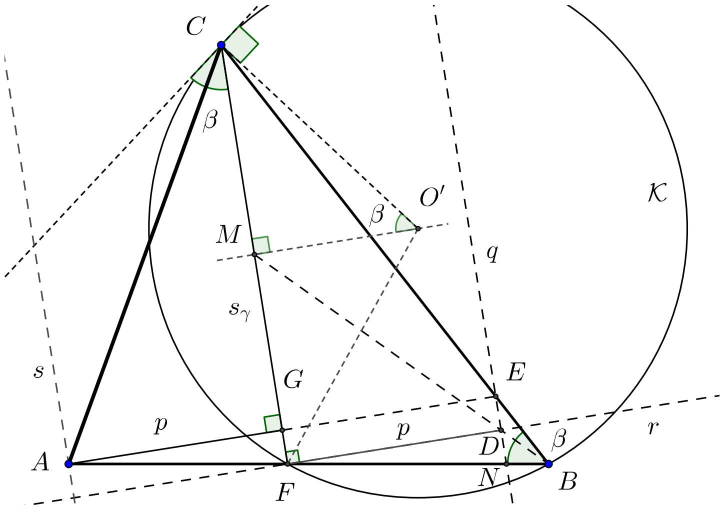
Nekaj geometrijskih konstrukcij

Ker nas je zanimalo, koliko rešitev naloge (A) je prof. Plemelj v resnici našel, smo (I. Hafner, P. Legiša in avtorja) stopili v ARS. Ker je tamkajšnja Plemljeva zapuščina obsežna, vsebuje 19 enot, smo natančneje pregledali enoto številka 3 in v njej našli na več listih geometrijske konstrukcije, za katere pa ni popolnoma razvidno, ali so popolne ali samo delne. Najbolj zanimiv je list stenskega koledarja za november 1939, na katerem je na hrbtni strani več konstrukcij. Za nekatere pa je treba šele ugotoviti, kaj predstavljajo, saj posebnih pojasnil, ki smo jih vajeni pri takih rečeh, skorajda ni. Nekatere konstrukcije so pa vendarle zelo očitno rešitve naloge (A). Nekaj zares elegantnih rešitev, do katerih se pride brez uporabe kotnih funkcij, predstavljamo v pričujočem prispevku. Konstrukcij, ki so bile objavljene v [2, 5, 8, 9], tukaj ne bomo ponavljali. Rešitev naloge (A), ki jo je prof. Vidav obravnaval v akademskem letu 1952/53 pri geometriji in je objavljena v [9], se le malo razločuje od rešitev v [1, 2, 4].

Bralec, ki želi bolje razumeti konstrukcije v nadaljevanju, naj jim sledi z geometrijskim orodjem, še bolje pa z računalniškim programom za dinamično geometrijo (na primer GeoGebro), da bo lahko z lahkoto spreminjal podatke. Kajti samo z gledanjem rešitev se bo bolj malo naučil.

1. Oglejmo si najprej rešitev naloge (B) iz Wiegandove zbirke [12], ki jo omenja prof. Plemelj v [7]. Poznamo simetralo s_γ kota γ iz oglišča C trikotnika ABC, razdaljo p oglišča A od te simetrale in kot β (slika 1). Zaradi enostavnosti vzemimo, da je β manjši od pravega kota. Enak pogoj bomo v nadaljevanju privzeli za kot $\varepsilon = \alpha - \beta$ v nalogi (A). Za večje kote potekajo konstrukcije podobno, le da je treba tu pa tam daljice podaljševati na eno ali drugo stran.

Najprej narišemo simetralo $s_\gamma = CF$ kota γ in njeno razpolovišče ozna-



Slika 1. Rešitev naloge (B).

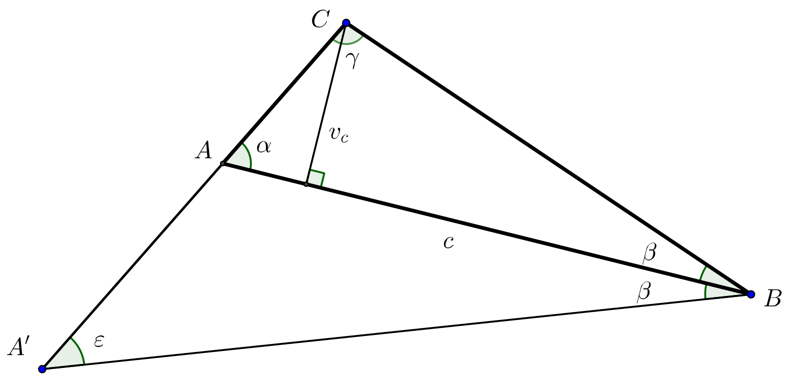
čimo z M. Oglišče B leži na krožnici $\mathcal{K}$, s katere se daljica CF vidi pod kotom β. (Takšno krožnico znamo narisati s pomočjo zveze med središčnimi in obodnimi koti. Središče O' trikotniku CFB očrtane krožnice je vrh enakokrakega trikotnika CFO' z osnovnico CF in kotom med krakoma 2β.)

Z naslednjim premislekom bomo prišli do točke B. Predstavljajmo si, da nam je trikotnik ABC že uspelo narisati. Skozi točko A potegnemo pravokotnico na simetralo CF, ki seka stranico BC v točki E, CF pa v točki G. Trikotnik AEC je enakokrak. Zato točka E leži na premici q, ki je vzporedna simetrali CF in je od nje oddaljena za p. Skozi točko F potegnemo pravokotnico r na CF in njeno presečišče s premico q označimo z D. Štirikotnik $FDEG$ je pravokotnik in $|DE| = |FG|$. Tudi točka D je od simetrale CF oddaljena za p, zato jo znamo enostavno konstruirati. Z N označimo presek premice q in stranice AB. Trikotnika AFG in FND sta skladna, ker sta podobna pravokotna trikotnika z enako dolgo istoležno kateto $|AG| = |FD| = p$. Zato je $|FG| = |ND|$. Od prej vemo, da je $|DE| = |FG|$, zato je BD težiščnica trikotnika NBE. Trikotnika FBC in NBE imata skupno oglišče B, stranici NE in FC sta si vzporedni, preostali dve stranici pa se pokrivata, zato sta si podobna in njuni težiščnici iz B se pokrivata.

Sedaj znamo skonstruirati točko B. Po eni strani leži na krožnici $\mathcal{K}$, po drugi strani pa na težiščnici trikotnikov NBE in FBC skozi B. Ta težiščnica poteka skozi razpolovišči D in M točki B nasprotnih stranic NE in FC. Po korakih poteka konstrukcija takole. Narišemo daljico CF, določimo njeno razpolovišče M in konstruiramo krožnico $\mathcal{K}$. Na pravokotnici r na daljico CF v točki F za p stran od F označimo točko D. Oglišče B iskanega trikotnika je presek premice skozi M in D ter krožnice $\mathcal{K}$. Oglišče A pa je presečišče premice skozi B in F ter vzporednice s daljici CF, za p stran od CF, na nasprotnem bregu kot B. Nazadnje izrišemo trikotnik ABC.

2. Kakšno povezavo ima naloga (B) z nalogo (A)? Naj bo ABC trikotnik z osnovnico c, višino v_c nanjo in običajno označenimi koti (slika 2). Točka A' naj bo presek poltraka CA in premice skozi B, ki oklepa z BA kot β in se ne pokriva z BC. Potem je daljica BA simetrala kota pri B v trikotniku $A'BC$. Točka C je od BA oddaljena za v_c. Kot α je zunanji kot trikotnika $A'BA$ in je zato enak vsoti njegovih notranjih nepriležnih kotov: $\alpha = \sphericalangle BA'A + \beta$, iz česar dobimo $\sphericalangle BA'A = \alpha - \beta = \varepsilon$.

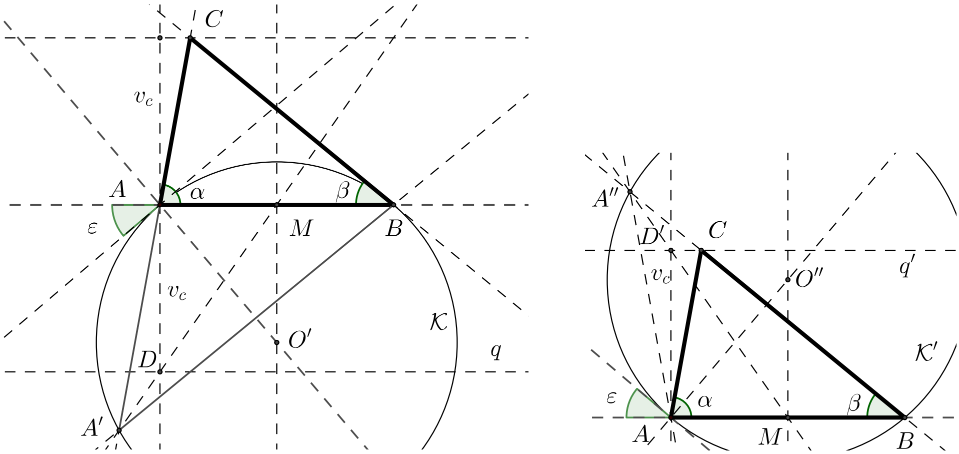
Trikotnik $A'BC$ po (1.) že znamo konstruirati. Vlogo kota β odigra kot ε, simetrale s_γ stranica c, razdalje p pa višina v_c. Točko A dobimo kot presečišče stranice $A'C$ s simetralo kota pri B trikotnika $A'BC$ (slika 3 levo).



Slika 2. Pojasnilo k rešitvi naloge (A) s pomočjo naloge (B).

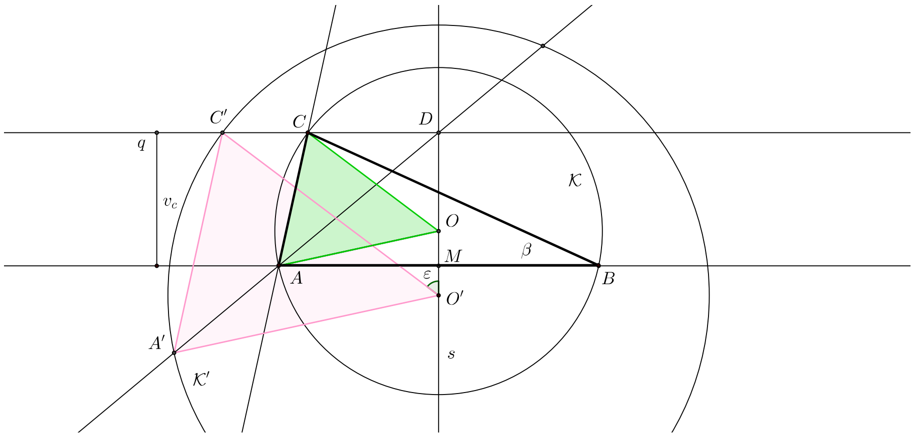
Konstrukcijo lahko precej poenostavimo z zrcaljenjem preko nosilke stranice AB (slika 3 desno). Pri tem trikotnika $A'BA$ ni treba risati.

3. Zanimiva je tudi naslednja rešitev naloge (A), ki jo najdemo v [1]. Da bi jo razumeli, si oglejmo trikotnik ABC, ki je standardno označen, razlika $\varepsilon = \alpha - \beta$ pa naj bo manjša od $\pi/2$ (slika 4). Trikotniku očrtamo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v točki O, načrtamo simetralo s stranice AB in njuno presečišče označimo z M. Skozi C potegnemo stranici AB vzporednico q, ki seka simetralo s v točki D. Najprej se prepričajmo, da polmer OC s



Slika 3. Ena od rešitev naloge (A).

simetralo s oklepa kot ε. Očitno je $\sphericalangle COA = 2\beta$, $\sphericalangle OAC = \pi/2 - \beta$ in $\sphericalangle MAO = \alpha - \sphericalangle OAC = \alpha - (\pi/2 - \beta) = \alpha + \beta - \pi/2$. Zato je $\sphericalangle AOM = \pi/2 - \sphericalangle MAO = \pi/2 - (\alpha + \beta - \pi/2) = \pi - \alpha - \beta$. Nazadnje je res $\sphericalangle DOC = \pi - 2\beta - (\pi - \alpha - \beta) = \alpha - \beta = \varepsilon$, kar je bilo treba preveriti.



Slika 4. Rešitev naloge (A) s podobnostjo trikotnikov.

Nato si na simetrali s izberemo poljubno točko O' pod premico q in narišemo trikotniku AOC podoben trikotnik $A'O'C'$, pri čemer oglišče C' leži na premici q, stranica $O'C'$ je vzporedna z OC in zato oklepa kot ε s simetralo s, stranica $O'A'$ pa vzporedna z OA. Trikotnika AOC in $A'O'C'$ sta enakokraka, točke D, A in A' pa kolinearne.

Sedaj se da iskani trikotnik preprosto konstruirati. Najprej narišemo stranico AB z dano dolžino c, načrtamo njeno simetralo s, vzporednico q stranici AB na dani višini v_c, označimo z D presečišče premic s in q, nakar na s nekje pod q izberemo točko O' in skoznjo pod danim kotom ε načrtamo premico, ki seka q v točki C'. Skozi C' načrtamo krožni lok $\mathcal{K}'$ s središčem v O'. Lok $\mathcal{K}'$ naj seka premico skozi A in D v točki A'. S tem je trikotnik $A'O'C'$ določen. Stranici $A'C'$ skozi A potegnimo še vzporednico, ki preseka q v točki C, ki je tretje oglišče iskanega trikotnika. Izrišemo trikotnik ABC.

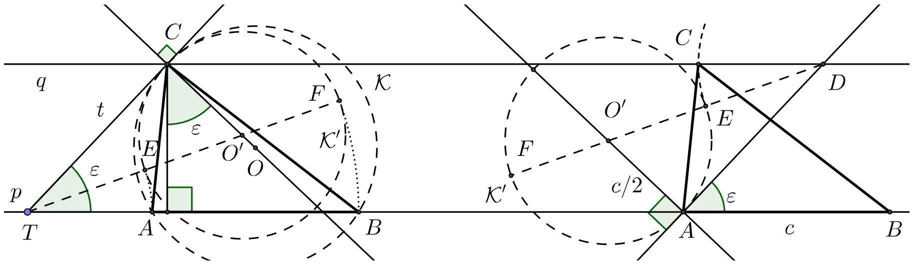
Če je $\pi/2 < \varepsilon < \pi$, poteka konstrukcija enako, le da točko O' izberemo nad premico q, v primeru $\varepsilon = \pi/2$ pa na q. V slednjem primeru lahko C' na q, levo od D, poljubno izberemo.

4. V [1], pa tudi v [5, 6], je rešitev naloge (A), ki temelji na *izreku o potenci točke glede na krožnico*. Izraz je leta 1826 uvedel Jakob Steiner (1796–1863), sam izrek pa je poznal že Evklid (Elementi, 3. knjiga, trditev 36), le da mu ni tako rekel. Obsežno delo [4] Steinerjevega izraza še ne uporablja. Dokaže pa se ga preprosto s podobnimi trikotniki.

Do elegantne rešitve naloge (A) pridemo po obravnavi trikotnika ABC, ki mu očrtamo krožnico $\mathcal{K}$ in njegovo središče označimo z O (slika 5 levo). V trikotniku načrtamo tudi višino v_c. Podobno kot v prejšnji rešitvi hitro ugotovimo, da je kot med to višino in polmerom CO enak $\varepsilon = \alpha - \beta$. V oglišču C konstruiramo na $\mathcal{K}$ tangento t, ki seka premico p, to je nosilko stranice AB, v točki T. Po izreku o potenci točke glede na krožnico velja: $|TC|^2 = |TA| \cdot |TB| = |TA| \cdot (|TA| + c)$. Tangenta t pa oklepa s p tudi kot ε. Za uspešno konstrukcijo trikotnika je treba najti le še razdaljo $|TA|$. To pa nam uspe s pomožno krožnico $\mathcal{K}'$, ki ima premer c in se v C dotika t. Skozi T in središče O' krožnice $\mathcal{K}'$ potegnemo premico, ki $\mathcal{K}'$ seka v točkah E in F. Tedaj prav tako po izreku o potenci točke glede na krožnico velja $|TC|^2 = |TE| \cdot |TF| = |TE| \cdot (|TE| + c)$. Ker ima kvadratna enačba $x(x + c) = |TC|^2$ eno samo pozitivno rešitev, je $|TA| = |TE|$.

Konstrukcija trikotnika ABC je sedaj na dlani. Načrtamo vzporedni premici p in q v medsebojni razdalji v_c. Na p izberemo točko T in skoznjo načrtamo premico t, ki oklepa s p kot ε. Njeno presečišče s q označimo s C. Načrtamo krožnico $\mathcal{K}'$, ki ima premer c in se v C dotika t. Središče $\mathcal{K}'$ označimo z O' in skozi T ter O' potegnemo premico, ki $\mathcal{K}'$ seka v točkah E in F. Krožna loka s središčem v T skozi E in F sekata p v točkah A in B. Načrtamo trikotnik ABC, ki je rešitev naloge.

Rešitev naloge (A), ki se nekoliko razlikuje od tiste v [1, 5, 6], najdemo tudi v [4]. Levo na sliki 5 je konstrukcija iz [1], pri kateri začnemo s fiksirano točko T oziroma C, desno pa iz [4], pri kateri začnemo s fiksno stranico AB.



Slika 5. Rešitvi naloge (A) s potenco točke glede na krožnico.

Za konec

Od *devet* v [7] in *kakih dvajset* v [3] omenjenih rešitev naloge (A) smo v [1, 2, 7, 6, 9] našli *šest* bistveno različnih. Zato ostaja še veliko dela, da ugotovimo, kaj je s preostalimi. Še vedno pa ne znamo odgovoriti na vprašanje, iz katere zbirke je prof. Borštner izbral nalogo (A).

Kolega Izidor Hafner je nekaj rešitev naloge (A) obdelal s programom *Mathematica* in jih objavil na svetovnem spletu: `demonstrations.wolfram.com/ThePlemeljConstructionOfATriangle/`

LITERATURA

[1] AS 2012, Plemelj Josip, škatla 3, mapa 58, J. Plemelj, Razni matematični zapiski in rokopisi.

[2] M. Brodar, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 8, 285.

[3] L. Čermelj, *Vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 4/5, 166.

[4] H. Holleben, P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I. in II. del, G. Reimer, Berlin 1831 in 1832.

[5] D. S. Modic, *Trikotniki*, Math, Ljubljana 2009.

[6] I. Munda, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 9, 323–324.

[7] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 6, 188–192.

[8] J. Plemelj, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 7, 243–245.

[9] I. Pucelj, *Plemljev trikotnik in negibne točke transformacij*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015), 1, 12–14.

[10] A. Suhadolc, *O profesorju Josipu Plemlju*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), 2, 53–57.

[11] I. Vidav, *Josip Plemelj, Ob stoletnici rojstva*, DMFA, Ljubljana 1975.

[12] A. Wiegand, *Geometrische Aufgaben für höhere Lehranstalten*, druga izdaja, Braunschweig, C. A. Schwetschke und Sohn, 1865.

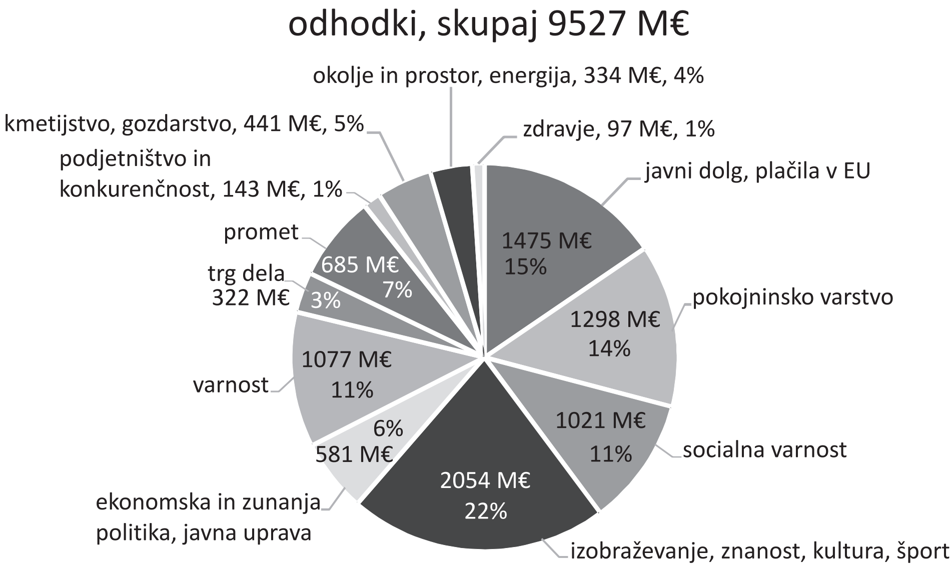
O MEDNARODNI ANALIZI TRENDOV ZNANJA – TIMSS ADVANCED 2015

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ali šolski sistem, v katerem delamo, v katerem se izobražujemo, nudi znanje in kompetence za prihodnost? Ali je njegovo financiranje smotrno? Ali je sistem vreden vloženega truda, ali potrebuje izboljšave? Kaj vpliva na kakovost šolskega sistema, kaj imajo skupnega uspešni in kaj neuspešni sistemi? To, ali vsaj del, so vprašanja, ki si jih zastavljajo vlade, učitelji, učenci in njihovi starši. Država znaten del proračuna (slika 1, [1]) namenja za šolstvo, pravzaprav celoten proračun pa napolnimo davkoplačevalci s prihodki iz dela, ki temelji na znanju, pridobljenem v danem šolskem sistemu.

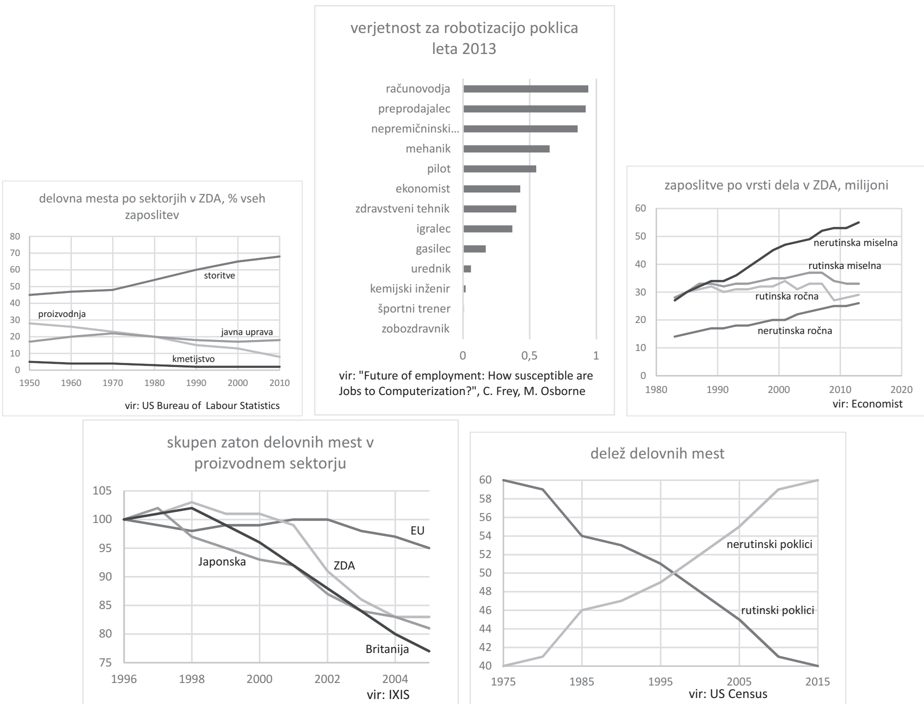
Učitelji, ki čutimo poučevanje kot poziv, želimo vedeti, ali dobro opravljamo svoje delo in kaj lahko storimo, da ga izboljšamo. Interes učencev je v tej zgodbi najbolj izrazit. Čemu vlagajo svoj trud, ali so ob tem zadovoljni, kaj odnesejo od tega procesa? Vse to pomembno vpliva na njihovo konkurenčnost, ko vstopijo na trg dela. Posredno seveda njihovo znanje vpliva



Slika 1. Slovenski proračun za leto 2017. Petina gre za šolstvo in šport, [1].

tudi na uspešnost celotne družbe. Dobro znano je in vse raziskave kažejo, da bodo v prihodnji družbi prevladovali visoko izobraženi delavci in ne proizvodni delavci. Ta trend kažejo diagrami na sliki 2. Potreba po ročnem delu se stalno manjša, saj to delo prevzemajo roboti in stroji. Rutinsko delo prevzemajo roboti ne le v proizvodnji, za trakom, temveč tudi v poklicih, ki so nekdaj veljali za intelektualne. Kar pomislite, kdaj ste nazadnje stali pred okencem v banki?

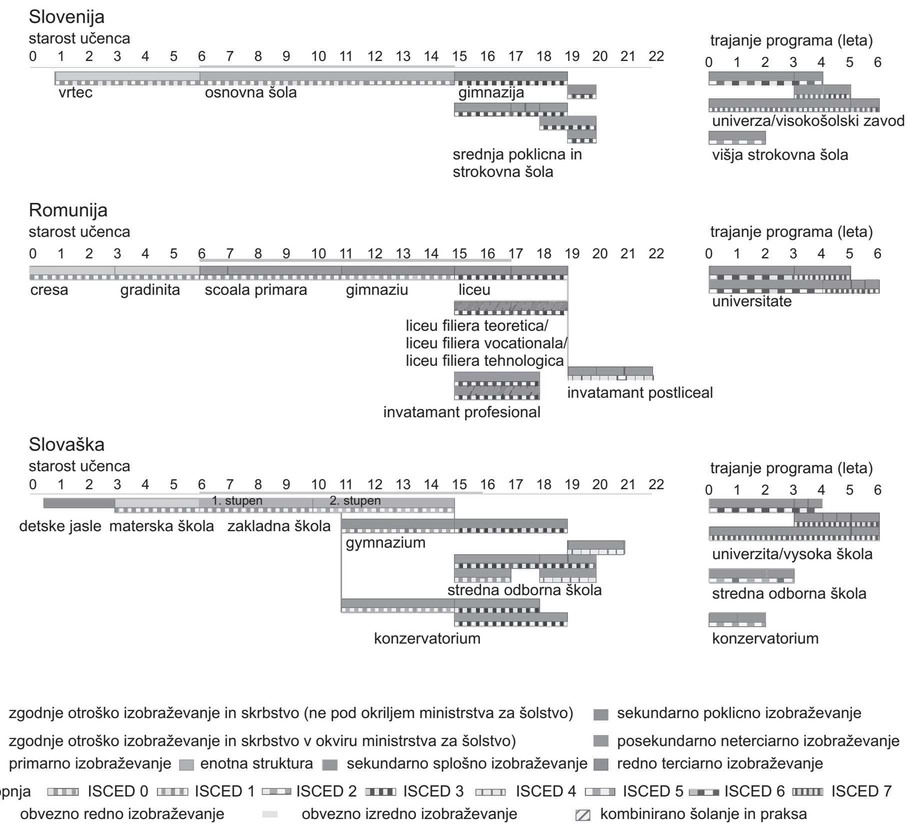
Po vprašanju, ali je naš šolski sistem dober, pride na vrsto vprašanje, kako kakovost sistema testirati? Seveda, eden od testov je kakovost življenja v določeni državi, ki pa je lahko odvisna še od kopice drugih dejavnikov, kot npr. zalog naravnih surovin, geostrateškega položaja. Kakovost šolskega sistema najlažje testiramo tako, da primerjamo med seboj znanje primerljivih vzorcev populacije v različnih državah. Izbira vzorca ni enostavna, saj se šolski sistemi med seboj razlikujejo ne le po kakovosti, temveč tudi po organiziranosti in učnih načrtih. Primer različnih izobraževalnih sistemov



Slika 2. Nekaj pokazateljev trendov in potreb znanja. Že površna ekstrapolacija kaže, da bodo v prihodnosti veliko dela prevzeli roboti, prevladovali bodo nerutinski, intelektualni poklici v storitveni dejavnosti.

kaže slika 3, obsežnejša primerjava pa je v [2]. Zaradi razlik v učnih načrtih ni nujno, da bodo učenci enake starosti imeli enako znanje podobnega predmeta. Pravzaprav bi lahko bilo merilo za znanje, pri enaki kakovosti poučevanja, kar število ur poučevanja nekega predmeta.

Nadaljnje vprašanje je, pri katerem predmetu sploh lahko primerjamo znanje med vzorci različnih sistemov? Zgodovina zaradi različnih narodnih poudarkov ne pride v poštev, ravno tako ne znanje slovnice. Vsem šolskim sistemom sta skupna matematika in naravoslovje, ki se v višjih stopnjah povsod deli enako na fiziko, kemijo in biologijo. To so torej primerni pred-



Slika 3. Izobraževalni sistemi se v grobem delijo na primarno, sekundarno in terciarno izobraževanje. Primarno izobraževanje je na splošno enako za celotno populacijo, v sekundarnem pa prihaja do delitev med splošnim in poklicnim izobraževanjem. Starost prehoda med različnimi stopnjami je v grobem povsod enaka, največja razlika med sistemi se pojavlja pri meji med primarno in sekundarno stopnjo. Diagram kaže slovenski izobraževalni sistem. Za primerjavo sta dodana še slovaški in romunski. Že hitri pogled kaže nekatere podobnosti pa tudi očitne razlike. Primerjava vseh evropskih sistemov je narejena v [2].

meti, pri katerih lahko primerjamo znanje populacije različnih držav.

Ko sta vzorec in predmet testiranja izbrana, je naslednje vprašanje, kakšen test uporabiti, čemu dajati poudarke? Pri izbiri testa se moramo zavedati praktičnosti izvedbe. Testirati moramo tako, da je vrednotenje testa kar se da objektivno, upoštevamo, da med reševanjem testa testiranec ne dobi povratne informacije in temu moramo prilagoditi testna vprašanja. Teste lahko razvrstimo po različnih kriterijih [3]. Po enem delimo naloge na naloge odprtega in zaprtega tipa. Pri nalogah zaprtega tipa je možen le en odgovor, pri nalogah odprtega pa več, odvisno od predpostavk in reševanja. Seveda je prvi način lažji za vrednotenje, drugi pa bolje preverja razumevanje konceptov. Med zaprte naloge tipično sodijo izbirne naloge, kjer vprašanju ponudimo več odgovorov, od katerih je le en pravi. Sem sodi tudi večina računskih nalog. Zaprte naloge jasno predstavijo vse potrebne podatke, na razpolago je primeren algoritem, ki zagotavlja pravilno rešitev. Odprte naloge so problemi, ki so sicer jasno formulirani, poti do rešitve pa so lahko različne, naloge zahtevajo ovrednotenje rešitev, vsi podatki niso podani, za njihovo rešitev lahko izberemo različne algoritme, obstaja več možnih pravilnih rešitev problema. Glede na osnovno predpostavko, ki jo naredi reševalec problema, so možne različne rešitve.

V posameznih vrstah nalog lahko nadalje razločimo različne elemente, ki jih ločimo po značilnostih in ciljih ter eden ali več hkrati lahko nastopajo v posamezni nalogi. Element naloge, ki ga imenujemo **povej čim več**, je problem brez določenega dokončnega pravilnega odgovora. Izhodišče problema je npr. le skica ali graf, na podlagi katerega učenci postavijo različne fizikalne probleme. Take naloge nudijo učencem priložnosti, da trenirajo razmišljanje, podobno razmišljanju, ki ga med reševanjem problemov uporabljajo eksperti. Element **vsebinsko bogatih problemov** pozornost z iskanja formul preusmerja k uporabi fizikalnih pojmov in razmislekov v okoliščini, podobni vsakdanjemu življenju. Opisi okoliščin so gostobesedni in problemi so kompleksni. Rešitev začnemo iskati tako, da filtriramo nebistvene informacije, ocenimo manjkajoče količine in sprejmemo ustrezne predpostavke. Pravzaprav je sprejemanje predpostavk eden izmed ključnih korakov v analizi problema, ki se ga pogosto niti ne zavedamo, oziroma so predpostavke že narejene v samem opisu problema. V tradicionalnih nalogah jih skorajda ne omenjamo oziroma se jih ne zavedamo. Vendar je prav ta veščina pomembna pri realnem reševanju problema, postavljanju hipoteze in matematičnem opisu rešitve. Element **inverznega problema** poda ali enačbo ali diagram oziroma graf, ki opisuje neki proces, naša naloga pa je opisati razmere, ki ustrezajo tej predlogi, in sestaviti besedilo ustrezne naloge, ki jo potem lahko rešujejo drugi. Na ta način odvračamo reševalce od zgolj naslanjanja na matematične izraze in njihove pretirane uporabe. Skozi te naloge tudi poudarjamo ključno vlogo enot pri obravnavanju problemov. **Sestavljanje problemov** od nas zahteva, da pripravljen začetek trditve nadaljujemo s fizikalno smiselnimi pojmi. **Tutorske vaje** so gradiva, ki upoštevajo tipične težave z izbrano snovjo, sestavljena so tako, da izboljšajo reševanje problemov iz te snovi in nas soočajo s konfliktom med napačno (alternativno, naivno) predstavo in pravilnim razumevanjem. **Naloge z razvrščanjem** so učinkovite za izboljšanje konceptualnega razumevanja in vrednotenja ciljev. V njih razvrščamo fizikalne situacije, sisteme ali količine glede na različne kriterije. **Naloge vrednotenja in naloge s preverjanjem rešitve** so problemi, pri katerih na različne načine kritično analiziramo že rešene naloge ali razmišljanja. Pri tovrstnih nalogah je lahko tipično predstavljen celoten postopek reševanja (s tipičnimi napakami). Lahko je tudi opisan eksperiment in so priloženi podatki v povezavi z njim. Poiskati moramo povezave med spremenljivkami, predvidimo odvisnosti oziroma preverimo podano rešitev naloge. Vrednotenje rezultatov je tudi sicer pogosta komponenta pri vseh drugih nalogah. V vrednotenje spada tudi analiza limitnih primerov, smiselnost velikostnih redov rezultatov, konsistentnost. **Naloge z več možnimi rešitvami** nimajo le enega pravilnega odgovora. Odgovor je odvisen od vnaprej sprejetih predpostavk, ki narekujejo strategijo reševanja problema, in analize končnih rezultatov, ki lahko vodi v spremembo predpostavk in nove rešitve. **Ne-številski problemi** so zastavljeni tako, da spodbujajo kvalitativno razmišljanje. Naloge tipa **oceni fizikalno količino** so naloge, pri katerih moramo oceniti vrednosti določenih količin, potrebnih za rešitev (takšne naloge, kjer ocenjujemo le velikostni red odgovora, so znane tudi kot Fermijevi problemi). S smiselnimi predpostavkami in enostavnim računanjem omejimo razpon vrednosti, med katerimi je prava rešitev. **Naloge za razvijanje sposobnosti simbolnega razmišljanja** so pari problemov, prvi s številskimi podatki in potrebno računsko rešitvijo in drugi s potrebno simbolno rešitvijo. Znano je, da dijaki težje razumejo rešitev, zapisano z enačbo in simboli, kot pa konkretno rešitev s številskim rezultatom. Take naloge lajšajo te težave. **Naloge z meritvami** vodijo do rešitev preko analize danih podatkov nekega eksperimenta. Vsi našteti tipi nalog na različne načine preverjajo razumevanje konceptov, do različne globine in predstavljajo vsak svojevrsten izziv pri vrednotenju odgovorov. Pri raziskavi se tipično omejimo na bolj zaprte tipe nalog, da olajšamo enakovrednost vrednotenja rezultatov.

Hkrati s testiranjem znanja je v raziskavi smiselno ugotavljati tudi okoliščine, ki zaznamujejo določen izobraževalni sistem, npr. delež proračuna namenjen šolstvu, računalniško opremljenost, odnos staršev in učiteljev do pouka. To omogoča določitev pomembnih parametrov in olajša prilagajanje izobraževalne politike.

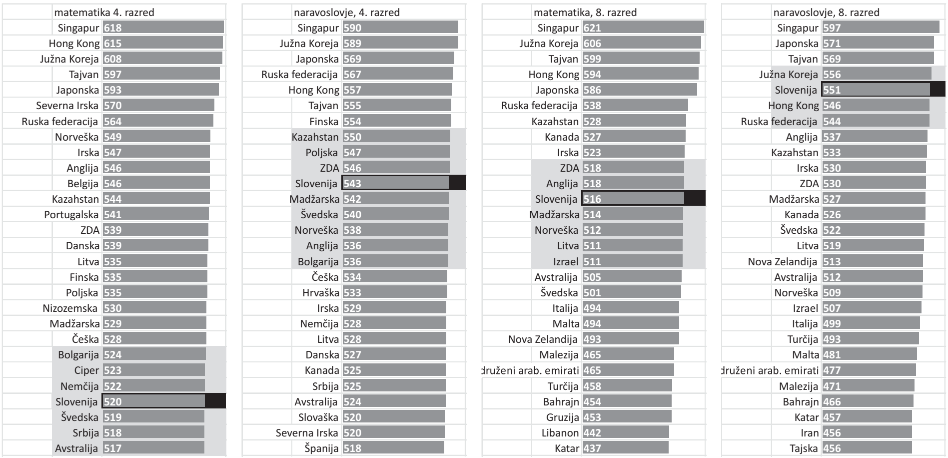
Ena od mednarodnih raziskav, ki ustreza opisanim kriterijem, je Trends in International Mathematics and Science Study z akronimom TIMSS. To je mednarodna raziskava znanja matematike in naravoslovnih predmetov med četrtošolci, to so učenci na prehodu med razrednim in predmetnim poukom, in osmošolci, to so učenci pred prehodom na sekundarno izobraževanje. V raziskavi TIMSS Advanced vzorec sestavljajo dijaki na koncu sekundarnega šolanja. TIMSS Advanced primerja znanje preduniverzitetne matematike med bodočimi maturanti splošnih gimnazij in znanje fizike med dijaki, prijavljenimi na maturo iz fizike. TIMSS poteka že vrsto let, kar omogoča ugotavljanje trendov. TIMSS 2015 je bil že 6. po vrsti, TIMSS Advanced pa teče od leta 1995 in je bil izveden v tretje. V raziskavi TIMSS za četrtošolce je sodelovalo 49 držav s 312.000 učenci, za osmošolce 39 držav z 270.000 učenci, v TIMSS Advanced pa je sodelovalo devet držav. Geografsko pokritost razberemo s slike 4. V Sloveniji raziskavo koordinira Pedagoški inštitut in rezultati raziskave so predstavljeni na spletu [4].

V raziskavi so poleg učencev sodelovali tudi učitelji, ravnatelji in starši četrtošolcev tako, da so izpolnili vprašalnik s podatki o dejavnikih poučevanja in učenja, podpori doma, predšolskem znanju, pogojih za poučevanje, stališčih do znanja ter študijskih in poklicnih namenih.

Rezultati med osnovnošolci Slovenijo uvrščajo v znanju matematike proti vrhu sredine, v naravoslovju pa tik pod sam vrh. Osmošolci se relativno bolje uvrščajo kot četrtošolci. Rezultate kaže slika 5.

Rezultati primerjave so med gimnazijci manj zanesljivi, saj je vzorec dosti manjši. Lestvici dosežkov za matematiko in fiziko kaže slika 6. V Sloveniji so podatke o znanju matematike zbirali ločeno tudi za maturante, ki so matematiko izbrali na višji ravni (VR). Med znanjem dijakov, ki matematiko opravljajo na maturi na osnovni ravni (OR), in tistimi, ki jo opravljajo na višji ravni, se kaže velika razlika. Po splošnem uspehu v znanju matematike se je Slovenija odrezala slabo in je pristala tik nad dnom. Upoštevati je

Slika 4. Države, ki so leta 2015 sodelovale v raziskavi TIMSS (levo) in TIMSS advanced (desno).



Slika 5. Dosežki učencev v raziskavi TIMSS. Levo: dosežki četrtošolcev v matematiki in naravoslovju. Desno: dosežki osmošolcev v matematiki in naravoslovju. S sivo so označene države, ki statistično ne odstopajo bistveno od Slovenije. Seznam kaže le najboljših 28 uvrščenih.

treba sicer še, da je slovenski vzorec zajemal bistveno večji del generacije kot v drugih državah. Rezultat dijakov, ki so maturo iz matematike opravljali na višji ravni, pa je izvrsten in Slovenijo uvršča na prvo mesto. Pokritost populacije zgolj s tem vzorcem ne odstopa od pokritosti vzorcev v najbolje uvrščenih državah. To kaže, da so v visoko uvrščenih državah v raziskavi sodelovali le najboljši dijaki. Na podlagi rezultatov bi težko sodili, kateri izobraževalni sistem je boljši. Očitno je, da naš sistem, kadar ima opravka z motiviranimi dijaki, dosega dobre rezultate. Pri fiziki so se dijaki uvrstili na prvo mesto, kar nas lahko navdaja s ponosom in je svojevrstno priznanje in nagrada za izobraževalce bodočih učiteljev in stalno strokovno izobraževanje aktivnih učiteljev ter predano delo vseh, učiteljev, oblikovalcev učnih načrtov in seveda dijakov.

Ko primerjamo rezultate raziskave TIMSS zadnjih let opazimo trend naraščanja znanja v osnovni šoli. Trend raziskave TIMSS Advanced kaže, da je znanje slovenskih maturantov stabilno. Trende kažejo grafi na sliki 7.

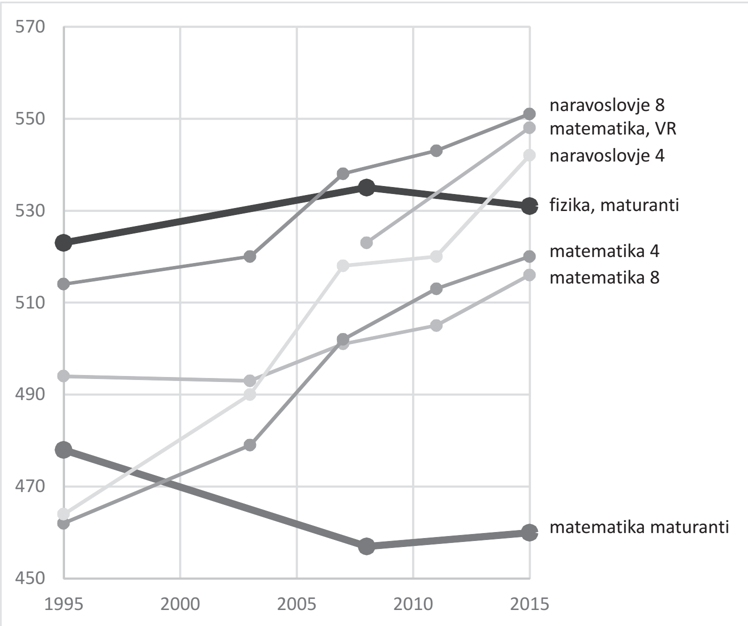
Analiza okoliščin, ki je bila izvedena hkrati s testi znanja, pokaže, da se slovenski dijaki v primerjavi z vrstniki v tujini manj radi učijo in imajo bolj odklonilen odnos do naravoslovja. Odklonilen odnos je še posebej izrazit do matematike med dijaki, ki opravljajo maturo iz matematike na osnovni ravni. Rezultate kaže slika 8.

Odgovori staršev kažejo manjše zaupanje v šolski sistem kot v tujini. Tako so starši le 17 % učencev ocenili, da si šola zelo prizadeva za akadem-

	preduniverzitetna matematika	
Slovenija, VR	549	8,2
Ruska federacija 6h+	540	1,9
Libanon	532	3,9
ZDA	485	11,4
Portugalska	482	28,5
Francija	463	21,5
Slovenija	460	34,4
Norveška	459	10,6
Švedska	431	14,1
Italija	422	25,5

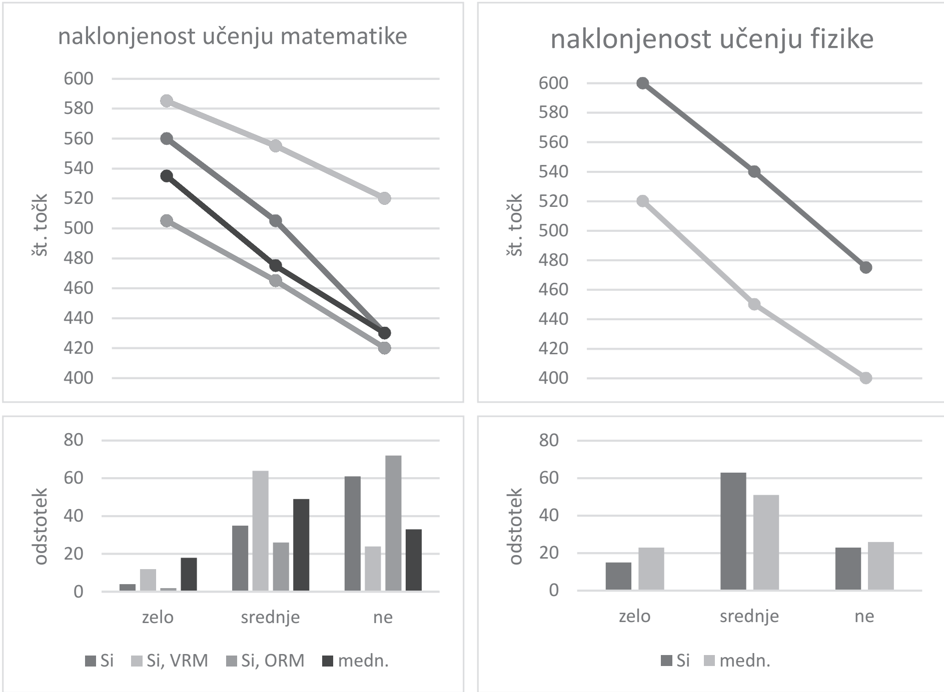
	preduniverzitetna fizika	
Slovenija	531	7,6
Ruska federacija	508	4,9
Norveška	507	6,5
Portugalska	467	5,1
Švedska	455	14,3
ZDA	437	4,8
Libanon	410	3,9
Italija	374	18,2
Francija	373	21,5

Slika 6. Dosežki maturantov v matematiki (levo) in fiziki (desno). V prvem stolpcu preglednice so naštete države, v drugem dosežek, v tretjem pa odstotek pokritosti populacije z vzorcem.



Slika 7. Rezultati raziskav za slovenske učence in dijake iz preteklih let.

sko uspešnost otroka, medtem ko je mednarodno povprečje 60 %. Le ena tretjina naših otrok ima starše z zelo pozitivnim odnosom do učenja matematike in naravoslovja (mednarodno dve tretjini). Starši slabo ocenjujejo znanje matematike in bralne pismenosti otroka ob vstopu v šolo, saj jih le za 7 % otrok meni, da imajo veliko znanja (mednarodno povprečje 21 %), za 52 % pa jih meni, da imajo malo znanja (mednarodno povprečje 25 %). Poročilo staršev o tem, kolikšna sta bila otrokova pismenost in zgodnje zna-



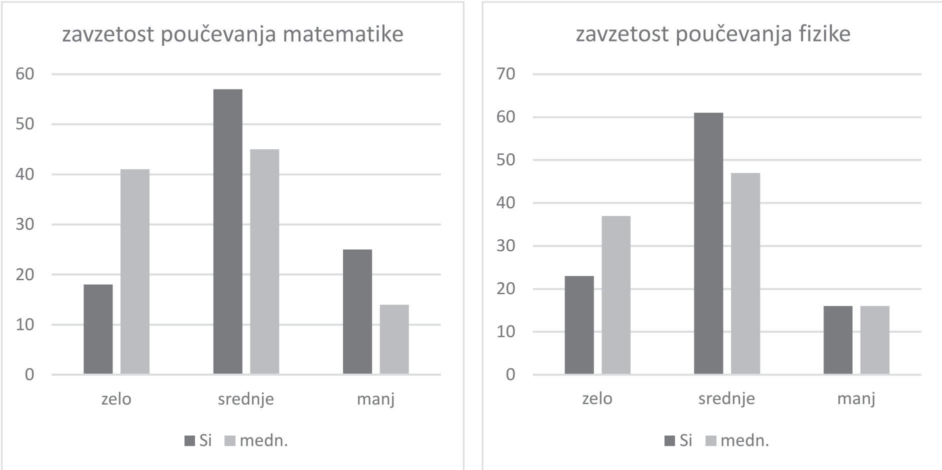
Slika 8. Kako radi se dijaki, ki so sodelovali v raziskavi TIMSS Advanced, učijo, primerjano z njihovim uspehom. Korelacija med slabim dosežkom in nenaklonjenostjo učenju je izrazita. Za primerjavo so dodani tudi mednarodni rezultati. Levo: matematika, desno: fizika. Slovenski dijaki so manj naklonjeni učenju v primerjavi z dijaki drugod po svetu.

nje matematike ob vstopu v prvi razred osnovne šole, kaže, da ima zgodnje učenje vpliv na znanje prav do četrtega razreda.

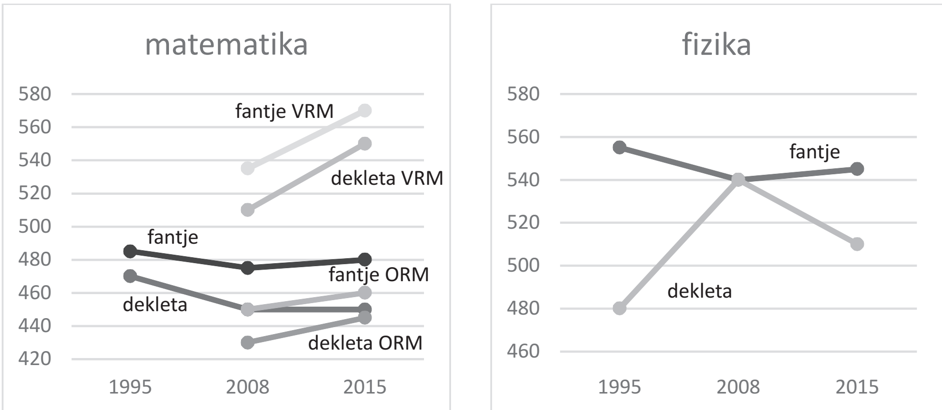
Med dijaki, ki so bili v Sloveniji testirani v znanju fizike, je bilo zgolj 30 % deklet, kar kaže na zaskrbljujoč upad zanimanja za naravoslovje in matematiko med dekleti. Dekleta tudi dosegajo slabše rezultate. Trende v dosežkih ločeno po spolu v matematiki in fiziki kaže slika 10.

Podrobneje si oglejmo še fizikalne vsebine, ki so bile preverjane s testi. Vsebinska področja, ki so jih pokrivali testi, so vključevala: mehaniko in termodinamiko (sile in gibanja, ohranitveni zakoni, toplota in temperatura) v obsegu 40 %, elektriko in magnetizem (elektrika in električna vezja, magnetizem in indukcija) v obsegu 25 % ter valovanje, atomska in jedrska fizika v obsegu 35 % časa za reševanje.

Poleg tematskih področij je pomemben vidik testa težavnost in kompleksnost nalog ter globina znanja (taksonomska stopnja), ki jih preverja test. Med sposobnostmi, ki so bile preverjane, so bile tudi ocenjevanje fizikalnih



Slika 9. Kaj o zavzetosti poučevanja svojih učiteljev mislijo dijaki v Sloveniji? Za primerjavo so dodani mednarodni rezultati. Slovenski dijaki na splošno menijo, da so njihovi učitelji manj zavzeti za poučevanje, kot menijo vrstniki po svetu.

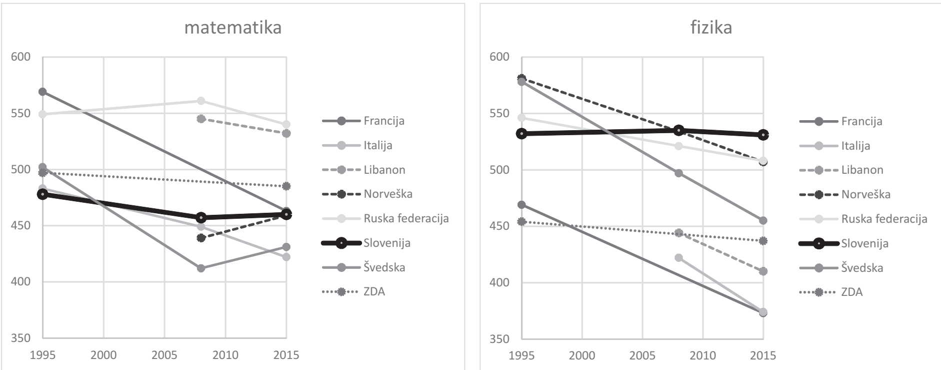


Slika 10. Grafi kažejo dosežke v znanju matematike (levo) in fizike (desno) v zadnjih letih, ločeno po spolu. Razlika med dekleti in fanti je očitna. V Sloveniji je v raziskavi znanja fizike na preduniverzitetnem nivoju sodelovalo 70 % fantov in 30 % deklet. Razmerje pri matematiki je 60 % deklet in 40 % fantov.

količin, presoja različnih razlag za neujemanje izmerjenih in izračunanih vrednosti, primerjava uporabnosti različnih materialov za določeni namen na podlagi grafov, opis postopka, s katerim lahko določimo natančnost neke naprave, predlog, kako izboljšati opisano metodo merjenja neke fizikalne količine.

V primerjavi s TIMSS Advanced 2008 je opažen premik testov k preverjanju procesnih znanj, znanj povezanih z načrtovanjem poskusov in analizo merskih podatkov, nalog, ki zahtevajo ocenjevanje fizikalnih količin. Tovrstna znanja so vključena tudi v najnovejše standarde in direktive glede naravoslovnih znanj po svetu (npr. NGSS v ZDA) in (sicer počasi, toda tudi po zaslugi raziskav, kot je TIMSS) prihajajo tudi v naš prostor/maturo.

Na koncu si oglejmo še trende celotne raziskave. Trendi znanja matematike in fizike maturantov v vseh državah so prikazani na sliki 11 in pravzaprav kažejo zaskrbljujočo sliko. Trendi so negativni in znak za ukrepanje politike ter stroke, da najde vzroke. Z rezultati raziskave je naša država postala drugim zgled za izobraževalni sistem, ki dosega visoko matematično in naravoslovno znanje, vendar tudi izstopa po nizkih stališčih, ki so povezana z dosežki.



Slika 11. Trendi znanja maturantov pri matematiki (levo) in fiziki (desno) v državah, ki so sodelovale v raziskavi TIMSS Advanced.

LITERATURA

[1] Sprejeti proračun, dostopno na `www.mf.gov.si/si/delovna_podrocja/proracun/sprejeti_proracun`, ogled 26. 6. 2017.

[2] European Commission/EACEA/Eurydice, 2016. The Structure of the European Education Systems 2016/17: Schematic Diagrams. Eurydice Facts and Figures. Luxembourg: Publications Office of the European Union.

[3] N. Zabukovšek, *Študija priljubljenosti fizike in vključevanja dijakov in dijakinj k pouku predmeta v povezavi z izbiro in uspešnostjo reševanja treh tipov nalog*, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, 2016.

[4] TIMSS Slovenija blog, dostopno na `timsspei.splet.arnes.si/?page_id=678`, ogled 26. 6. 2017.

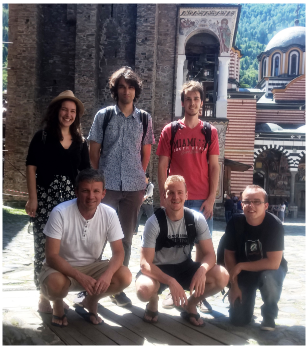
ŠTIRIINDVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Na letošnje mednarodno tekmovanje študentov je prišlo kar 331 tekmovalcev z vsega sveta in vodje 71 ekip. V prvih letih tekmovanja je organizator prof. John Jayne z londonske univerze UCL poskušal izvesti tekmovanje na različnih koncih Evrope, zadnjih deset let pa je tekmovanje vsako leto v Bolgariji. Kampus Ameriške univerze v Blagoevgradu je ena od redkih institucij, ki lahko na približno spodoben način in ob razumnih stroških vsako leto poskrbi za toliko udeležencev. Vse kaže, da bo Blagoevgrad postal stalna lokacija tekmovanja.

Tekmovanje je potekalo sredi najhujšega vročinskega vala med 31. julijem in 6. avgustom 2017. Vsem tekmovalcem gre posebna pohvala, da jim je uspelo v neklimatiziranih prostorih ne le preživeti ves teden, temveč tudi dvakrat po pet ur reševati težke matematične naloge. Ljubljansko univerzo so zastopali Juš Kosmač, Samo Kralj, Severin Mejak, Lenart Treven in Živa Urbančič, primorsko pa Daniil Baldouski, Filip Božič in Arber Avdullahu.

Za reševanje nalog je potrebno znanje, ki ga večina študentov pridobi v prvih dveh letih študija matematike. Naloge so bile letos zelo težke, kljub temu pa sta kar dva tekmovalca dosegla vse možne točke. Zanimivo je, da kar osem prvouvrščenih študentov prihaja z univerz iz Tel Aviva ali iz Sankt Peterburga.

Živa Urbančič in Arber Avdullahu sta dobila pohvalo, Juš Kosmač, Lenart Treven, Severin Mejak in Samo Kralj pa tretjo nagrado. Jušu Kosmaču je žal le za eno točko ušla druga nagrada.



Slika 1. Ljubljanska ekipa v Rilskem samostanu.

Podrobnosti o tekmovanju lahko najdete na spletni strani www.imc-math.org.

Bralci Obzornika lahko svoje znanje matematike preverijo na naslednjih zelo simpatičnih nalogah. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko. Praviloma je prva naloga vedno najlažja, potem pa težavnost narašča do pete naloge, ki je večinoma nedostopna.

II.1. *Naj bo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija z limito v neskončnosti*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Pokaži, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = L.$$

Nalogo se da rešiti na več načinov. Najbrž najbolj naraven način je substitucija $t = nx$, ki zamenja meje iskanemu integralu in tako omogoči uporabo ocene v neskončnosti.

Obstaja pa tudi krajša in bolj zvita rešitev. Naj bo

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Za $t > 0$ velja

$$\int_0^1 f(tx)\,dx = \int_0^t f(u)\frac{du}{t} = \frac{F(t)}{t}.$$

V primeru $\lim_{t\to\infty} F(t) = \pm\infty$ lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo, ki pove

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{1} = L.$$

Limita $\lim_{t\to\infty} F(t)$ je končna le v primeru $L = 0$. Tudi takrat je $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = 0 = L$. Zato je $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n} = L$.

I.3. *Zaporedje matrik $(A_n)_n$ je podano rekurzivno s pravilom*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & I \\ I & A_n \end{bmatrix},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pokaži, da ima matrika A_n $n+1$ različnih lastnih vrednosti $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ z algebrajskimi večkratnostmi $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.

Slika 2. Primorska ekipa.

Tudi to nalogo se da rešiti na več načinov. Najhitreje pridemo do rešitve, če izračunamo karakteristični polinom matrike A_{n+1}:

$$\Delta_{A_{n+1}}(\lambda) = \begin{vmatrix} A_n - \lambda I, & I \\ I, & A_n - \lambda I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & I - (A_n - \lambda I)^2 \\ I, & A_n - \lambda I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} I - (A_n - \lambda I)^2, & 0 \\ A_n - \lambda I, & I \end{vmatrix} = \big(I - (A_n - \lambda I)\big)\big(I + (A_n - \lambda I)\big) =$$

$$= \big((1+\lambda)I - A_n\big)\big(A_n - (\lambda - 1)I\big) = \Delta_{A_n}(\lambda + 1)\Delta_{A_n}(\lambda - 1).$$

Matrika A_1 ima lastni vrednosti -1 in 1. Zadnji račun pokaže, da vsaka lastna vrednost λ matrike A_n porodi lastni vrednosti $\lambda - 1$ in $\lambda + 1$ matrike A_{n+1}. Tako ima recimo matrika A_2 vse lastne vrednosti $-1-1=-2$, $-1+1=0$, $1-1=0$ in $1+1=2$, matrika A_3 pa lastne vrednosti -3,$-1(3\times)$, $1(3\times)$ in 3. Dokaz lahko zaključimo z indukcijo, še lažje pa je, če si shematsko predstavljamo, da se nove lastne vrednosti z ustrezno algebrajsko večkratnostjo pojavijo vsakič v novi vrstici Pascalovega trikotnika.

I.3. *Za vsako naravno število m naj $P(m)$ pomeni produkt vseh naravnih deliteljev števila m (npr. $P(6) = 36$). Za dano naravno število n definirajmo zaporedje $(a_n)_n$ z začetnim členom $a_1 = n$ in rekurzivnim pravilom*

$$a_{k+1} = P(a_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Ali za vsako množico $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$ obstaja takšen začetni člen $a_1 = n$, da velja: Za vse $1 \leq k \leq 2017$ je člen a_k popoln kvadrat natanko za $k \in S$?

To je res. Za zaporedje si lahko izberemo kar potence števila dva, pri čemer soda potenca pomeni popoln kvadrat. Pokažimo, da zahtevi ustreza zaporedje $a_k = 2^{p_k}$ za primerne potence p_k. Velja

$$a_{k+1} = P(a_k) = P(2^{p_k}) = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdots 2^{p_k} = 2^{\frac{1}{2}p_k(p_k+1)}.$$

Za $1 \le m \le 2017$ bomo potence p_k konstruirali induktivno, tako da bo za $1 \le k \le m$ veljalo $p_{k+1} = \frac{1}{2}p_k(p_k+1)$ in bo p_k sodo število natanko za $k \in S$.

V primeru $m = 1$ vzamemo $p_1 = 0$, če $1 \in S$, in $p_1 = 1$ sicer. Privzemimo, da smo za neki $m < 2017$ že dobili zaporedje $(p_k)_k$ z želenima lastnostma za $k \le m$. V primeru $k = m+1$ je morda konstruirano zaporedje že pravo. Če ni, ga zamenjamo z novim zaporedjem z novim začetnim členom $p_1' = p_1 + 2^m$ in enakim rekurzivnim pravilom $p_{k+1}' = \frac{1}{2}p_k'(p_k'+1)$. Pokažimo, da velja $p_k' \equiv p_k + 2^{m-k+1} \pmod{2^{m-k+2}}$:

$$\begin{aligned} p_{k+1}' = \tfrac{1}{2}p_k'(p_k'+1) &\equiv \tfrac{1}{2}(p_k + 2^{m-k+1})((p_k+1) + 2^{m-k+1}) = \\ &= \tfrac{1}{2}p_k(p_k+1) + 2^{2m-2k+1} + 2^{m-k}(2p_k+1) \equiv \\ &\equiv \tfrac{1}{2}p_k(p_k+1) + 2^{m-k} \equiv p_{k+1} + 2^{m-(k+1)+1} \pmod{2^{m-(k+1)+2}}. \end{aligned}$$

Zato je $p_k \equiv p_k' \pmod 2$ za $k = 1, \ldots, m$ in $p_{m+1} \equiv p_{m+1}' + 1 \pmod 2$, ravno to pa smo želeli doseči.

II.4. *Zaporedje zvezno odvedljivih funkcij $(f_n)_n$, $f_n\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, je definirano s $f_1 = 1$ in rekurzivno s pravilom*

$$f_{n+1}' = f_n f_{n+1} \text{ na } (0,1),\ f_{n+1}(0) = 1.$$

Pokaži, da za vsak $x \in [0,1)$ obstaja limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, in določi limitno funkcijo.

Iz zapisane diferencialne enačbe sledi integralska enačba

$$f_{n+1}(x) = \exp\left(\int_0^x f_n(t)\,dt\right).$$

Lahko je videti, da je preslikava $\Phi\colon C([0,1)) \to C([0,1))$ s predpisom

$$\Phi(f)(x) = \exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$$

monotona. Ker na $(0,1)$ velja $f_2(x) = e^x > 1 = f_1(x)$, je $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $x \in (0,1)$.

S pomočjo odvajanja vidimo, da negibna točka f preslikave Φ na prostoru $\{h \in C([0,1)) : h(0) = 1\}$ zadošča diferencialni enačbi

$$\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) f(x) = f'(x),$$

zato je

$$f^2 = f',\ f(0) = 1.$$

Rešitev enačbe je funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ker je $f_1 < f$ na $(0,1)$, z indukcijo dobimo $f_{n+1} = \Phi(f_n) < \Phi(f) = f$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Tako je na $(0,1)$ zaporedje $(f_n)_n$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja končna limita g. Pokazali bomo, da je $g = f$.

Velja $g(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Ker je $f_1 = 1$, iz integralske enačbe sledi, da za vse n velja $f_n > 0$ na $[0,1)$. Iz iste enačbe od tod sledi, da so vse funkcije f_n naraščajoče. Tudi odvodi $f'_{n+1} = f_n f_{n+1}$ so naraščajoči, zato so f_n konveksne funkcije. Tako je tudi g konveksna in posledično zvezna na intervalu $(0,1)$. Funkcija g je zvezna tudi v točki 0, ker je $1 = f_1 \leq g \leq f$ in je $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 1$. Tako smo pokazali, da zaporedje zveznih funkcij na kompaktnem intervalu konvergira k zvezni funkciji, zato je konvergenca enakomerna na vsakem intervalu $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Enostavna ocena pokaže, da je pri fiksnem ε funkcija Φ zvezna na prostoru $C([0,1-\varepsilon])$.

Pokažimo, da je g negibna točka preslikave Φ. V nasprotnem primeru bi obstajala $x \in [0, 1-\varepsilon]$ in $\eta > 0$, tako da bi bilo $|\Phi(g)(x) - g(x)| > \eta$. Zaradi zveznosti Φ obstaja $\delta > 0$, da je v supremum normi

$$\|\Phi(\bar{g}) - \Phi(g)\| < \tfrac{1}{3}\eta,\ \text{če je } \|\bar{g} - g\| < \delta.$$

Vzemimo dovolj velik N, da je $\|f_n - g\| < \min\{\delta, \frac{1}{3}\eta\}$ za $n \geq N$. Tedaj je

$$\|f_{n+1} - \Phi(g)\| = \|\Phi(f_n) - \Phi(g)\| < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Tako pridemo do protislovja:

$$|f_{n+1}(x) - \Phi(g)(x)| > |\Phi(g)(x) - g(x)| - |g(x) - f_{n+1}(x)| > \eta - \tfrac{1}{3}\eta.$$

Ker je f edina negibna točka preslikave Φ na prostoru $\{h \in C([0,1-\varepsilon]) : h(0) = 1\}$, je $g = f$ na intervalu $[0, 1-\varepsilon]$. To velja za poljuben $\varepsilon \in (0,1)$, zato je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{za } x \in [0,1).$$

Marjan Jerman

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA TER PUHOVA PRIZNANJA ZA LETO 2017

Zoisove nagrade, Zoisova priznanja in Puhova priznanja so slavnostno podelili 23. novembra 2017. Odbor RS za Zoisovo nagrado, Zoisovo priznanje, priznanje ambasador znanosti in Puhovo priznanje je letos podelil Zoisovo nagrado za življenjsko delo, tri Zoisove nagrade za vrhunske dosežke, pet Zoisovih priznanj in tri Puhova priznanja. Med prejemniki so tudi trije člani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Uredništvo vsem prejemnikom nagrad in priznanj čestita za nagrade in priznanja ter želi še veliko raziskovalnih uspehov.

Slika 1. Letošnji prejemniki Zoisovih nagrad, Zoisovih priznanj ter Puhovih priznanj. Foto: MIZŠ

Zoisovo nagrado za življenjsko delo na področju teorijske fizike mehke snovi je prejel prof. dr. Slobodan Žumer. »Dr. Slobodan Žumer, redni profesor fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani ter raziskovalni svetnik na Institutu Jožef Stefan, je najvidnejši slovenski strokovnjak za teoretično fiziko anizotropnih mehkih snovi in med vodilnimi na svetu. Njegovi vrhunski raziskovalni dosežki in mednarodno sodelovanje ter zlasti tesno sodelovanje z našimi eksperimentalnimi fiziki so temelji, na katerih je nastala »ljubljanska šola fizike tekočih kristalov«, priznana kot eden od vodilnih centrov za anizotropne mehke snovi na svetu. Prof. dr. Slobodan Žumer je velik del svojih raziskav posvetil fiziki anizotropnih mehkih snovi, predvsem ograjenih in koloidnih tekočih kristalov. S člankom, objavljenim leta 1986 v znanstveni reviji Applied Physics Letters in citiranim več kot

900-krat, je postal soutemeljitelj raziskovalnega polja dispergiranih tekočih kristalov, za kar je leta 1990 dobil Kidričevo nagrado. Sledil je mednarodni patent, na katerem je temeljil začetek industrijske proizvodnje pametnih stekel, ki se še vedno proizvajajo, kar dokazuje uporabno vrednost temeljnih raziskav. V zadnjem obdobju se je usmeril v proučevanje topoloških defektov ter spletov in vozlov v nematskih koloidih, kjer je s sodelavci dosegel preboj s teoretično napovedjo nematskega spletanja. Delo je omogočilo razcvet novega področja topološke mehke snovi.

Prof. dr. Žumer je objavil več kot 270 znanstvenih člankov, ki so citirani več kot 9000-krat. Izpostaviti je treba niz del v znanstvenih revijah iz skupin Nature in Science, kar 30 del v Physical Review Letters ter več kot 100 vabljenih in plenarnih predavanj na mednarodnih konferencah. Mednarodna znanstvena skupnost ga je tudi počastila z izvolitvijo za predsednika mednarodne zveze za tekoče kristale International Liquid Crystal Society in člana Evropske akademije znanosti in umetnosti.

Kvantitativni opis nagrajenčevega dela je impresiven, pomembnost njegovih raziskav pa še najbolje razumemo, če ob pogledu na tekočekristalni zaslon pametnega telefona pomislimo, da je k nadaljnjemu razumevanju in razvoju zapletenih tekočekristalnih sistemov z možnostmi za nove tehnologije pomembno prispeval prav prof. Slobodan Žumer s svojo ljubljansko skupino sodelavcev.«

Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju diskretne matematike je prejel izr. prof. dr. Martin Milanič. »Dr. Martin Milanič raziskovalno deluje na področju diskretne matematike in teoretičnega računalništva na Univerzi na Primorskem. Njegova bibliografija obsega več kot 70 izvirnih znanstvenih člankov in poglavje v znanstveni monografiji, odmevnost njegovega dela pa izkazuje več kot 290 čistih citatov v zadnjih desetih letih.

Dr. Milanič v svojem raziskovalnem delu poseben poudarek namenja študiju strukturnih in algoritmičnih vidikov grafovskih razredov. Njegovi najpomembnejši raziskovalni prispevki temeljijo na novih konceptih in ugotovitvah v teoriji grafovskih razredov (ekvistabilni in CIS grafi, pragovni koncepti in dominacija), na uvedbi novih grafovskih parametrov na področju povezanosti in dominacije v grafih (separabilnost in Grundyjevo dominantno število), na študiju računske zahtevnosti optimizacijskih problemov na grafih in omrežjih (neodvisna množica, vektorska povezanost, viralni marketing) ter na razvoju modelov in odkrivanju novih možnih uporab metod teorije grafov in kombinatorične optimizacije v bioinformatiki. S svojim raziskovalnim, mentorskim in organizacijskim delom tako ključno prispeva k razvoju tega podpodročja matematike v Sloveniji.«

Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju jedrske magnetne resonance materialov je prejel prof. dr. Gregor Mali. »Dr. Gregor Mali je višji znanstveni sodelavec na Kemijskem inštitutu v Ljubljani in izredni profesor za področje fizike na Univerzi v Novi Gorici. Ukvarja se z razvojem in uporabo metod jedrske magnetne resonance za študij materialov za shranjevanje energije ter ločevanje in shranjevanje plinov. V slovenski prostor je prvi vpeljal visoko ločljivo jedrsko magnetno resonanco v trdnem, ki omogoča vpogled v zgradbo materialov in procese v njih na atomski ravni. Vpeljevati je začel tudi računske metode, s katerimi je mogoče napovedati parametre, merljive z magnetno resonanco. Računske metode skupaj z magnetno resonanco povezuje v tako imenovano NMR-kristalografijo, to je nov celostni način določanja zgradbe materialov. Še posebej odmevno je njegovo delo na področju analize heterogenih in neurejenih poroznih sistemov, ki je pritegnilo zanimanje za sodelovanje številnih uglednih raziskovalnih skupin iz tujine, na primer skupine iz Leuvna v Belgiji, Versaillesa v Franciji in Cambridgea v Veliki Britaniji.«

LITERATURA

[1] http://www.mizs.gov.si/si/medijsko_sredisce/novica/article/55/10272/, ogled 27. 11. 2017.

Aleš Mohorič

PROF. DR. PETER KRIŽAN ČLAN SAZU

V razred za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede Slovenske akademije znanosti in umetnosti so letos sprejeli člana Društva matematikov, fizikov in astronomov prof. dr. Petra Križana. Za to čast kolegu čestitamo!

Prof. dr. Peter Križan je sodelavec Oddelka za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Instituta Jožef Stefan. Prof. Križan je doktoriral na Univerzi v Ljubljani. Podoktorsko raziskovanje je opravil na nemškem elektronskem sinhrotronu DESY v Hamburgu, kot gostujoči profesor pa je predaval na Univerzi v Nagoji na Japonskem.

Njegovo raziskovalno delo spada v fiziko osnovnih delcev in je v glavnem povezano z raziskovanjem procesov, nastalih pri trkih elektronov in pozitronov visokih energij, z identifikacijo nabitih delcev in detekcijo fotonov. Sodi med vodilne mednarodne osebnosti v fiziki osnovnih delcev, veliko je prispeval k mednarodnemu ugledu Slovenije na tem področju. Je avtor velikega števila zelo citiranih člankov v mednarodnih revijah, član uredniških odborov mednarodnih znanstvenih revij, pogost vabljeni predavatelj na univerzah in raziskovalnih institucijah, organizator in član več znanstvenih svetov konferenc in konferenčnih serij ter član vrste strokovnih odborov s področja fizike osnovnih delcev.

Uredništvo

UMRLA JE FIELDSOVA NAGRAJENKA

Sredi julija 2017 je umrla dobitnica Fieldsove medalje, iransko-ameriška matematičarka Maryam Mirzakhani, stara komaj štirideset let. Njeno delo smo na kratko prestavili v OMF [1].

Kot smo izvedeli šele sedaj, je v času prejema tega najvišjega priznanja na področju matematike dosegla etapno zmago v boju s težko boleznijo. Vendar je bila od zdravljenja tako oslabljena, da se je bala, da ne bo mogla priti na podelitev v Seul leta 2014. Na koncu je v Južno Korejo le prišla, vendar ni imela napovedanega predavanja. Šest kolegic, med njimi tudi takratna predsednica Mednarodne matematične zveze (IMU) Ingrid Daubechies, jo je varovalo pred preveč vsiljivimi reporterji.

Poročena je bila s češkim matematikom in profesorjem na Univerzi Stanford Janom Vondrákom in zapustila je šest let staro hčerko Anihito. Islamska republika Iran njenega zakona z nemuslimanom ne priznava, zato mož in hčerka nimata vstopa v to državo. Šestdeset poslancev iranskega parlamenta je po njeni smrti vložilo predlog, da ustrezni zakon spremenijo, tako da bi osebe iz takih zakonov le lahko obiskale sorodnike.

LITERATURA

[1] P. Legiša, *Miriam Mirzakhani je kot prva ženska dobila Fieldsovo medaljo*, Obz. mat. fiz. **61** (2014), 195–200.

Peter Legiša

POLETNA ŠOLA DEVETOŠOLCEV V PLEMLJEVI VILI

Po več letih premora je od 19. do 23. junija letos v Plemljevi vili na Bledu spet potekala nagradna poletna šola za učence zaključnega razreda osnovne šole. Za 19 devetošolcev, nagrajenih na državnem tekmovanju iz matematike, fizike ali astronomije, smo izvedli pester strokovni program: delavnice kombinatorike (dr. Boštjan Kuzman), geometrije (mag. Milan Mitrović) in fizike z astronomijo (dr. Barbara Rovšek) sta dopolnili še predavanji o taksi geometriji (dr. Marko Slapar) in o umiranju zvezd (dr. Andreja Gomboc). Kot pedagoški sodelavki sta pri izvedbi ves teden sodelovali študentki Ana Petek in Teja Koprivnikar. Zadnji dan so udeleženci obiskali tudi Antimuzej Dežela fizike z zanimivimi fizikalnimi eksperimenti, sicer pa so pester teden začinile še številne športne in družabne aktivnosti – sprehod v blejski Vintgar, odbojka na mivki, kopanje v jezeru, družabni večeri ob namiznih igrah in kitari. Ob zaključku smo poleg fotoutrinkov prisotnim staršem na kratko predstavili tudi življenjsko pot prof. Plemlja in se zahvalili Turizmu Bled za finančno podporo letošnji poletni šoli. Upam, da nam bo oživljeno tradicijo poletnega dela z osnovnošolci pod okriljem DMFA Slovenije uspelo nadaljevati tudi prihodnje leto.

Slika 2. Udeleženci Poletne šole devetošolcev v Plemljevi vili.

Boštjan Kuzman

DR. PETER LEGIŠA – NOVI ČASTNI ČLAN DMFA SLOVENIJE

Sedemdeseti občni zbor DMFA Slovenije je 20. oktobra na predlog upravnega odbora za novega častnega člana DMFA Slovenije imenoval **dr. Petra Legišo**.

Dr. Peter Legiša je diplomiral na Oddelku za tehnično matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo (FNT) v Ljubljani. Na podiplomskem študiju je bil na univerzi Tulane v New Orleansu (ZDA). Tako pri magisteriju kot tudi pri doktoratu je bil njegov mentor prof. dr. Ivan Vidav. Na podoktorskem izpopolnjevanju je bil na kalifornijski univerzi v Berkeleyu. Ves čas je bil zaposlen na Fakulteti za matematiko in fiziko, nazadnje kot izredni profesor za področje Analize in algebre.

Legiševo znanstveno delo lahko razdelimo na dve obdobji: od leta 1974–1981 in po letu 2006. V prvem obdobju je dosegel lepe rezultate na področju C*-algeber in predvsem Banachovih algeber, ki so izhajali iz magistrskega dela in doktorske disertacije pri prof. Vidavu (takrat je nastal tudi njun skupni članek), in določenih rezultatov, povezanih s to problematiko. Za to prvo obdobje je Peter Legiša leta 1980 prejel prvo nagrado za mlade balkanske raziskovalce na 5. balkanijadi v Turčiji.

Večina strokovnega dela v obdobju 1981–2006 se je nanašala na učne načrte, učbenike ter uvajalne in redne seminarje za učitelje matematike. V sodelovanju z drugimi avtorji je napisal šest srednješolskih učbenikov matematike. Sam je kasneje napisal še sedem srednješolskih učbenikov in jih večkrat preoblikoval in izboljševal. O izkušnjah, ki si jih je pridobil pri tem delu, je napisal nekaj prispevkov s področja matematičnega izobraževanja. Napisal je tudi priročnik za srednješolske profesorje matematike. Vsi učbeniki (in priročnik) so doživeli ponatise.

Priobčil je več kot 30 strokovnih člankov za Obzornik za matematiko in fiziko (OMF), vsaj pet pa tudi za Naše razglede. Svoje znanje fizike je združil z zanimanjem za fotografijo in napisal več strokovnih člankov v zvezi z optiko in fotografijo, predvsem v Preseku. Njegov fotoaparat je nepogrešljiv na različnih srečanjih matematikov.

Za delo na področju izobraževanja je Peter Legiša leta 2000 prejel nagrado Republike Slovenije na področju šolstva.

Tudi njegovo pedagoško delo je pestro. Od izvolitve v naziv docenta je imel predavanja iz Matematike I in Matematike II za študente kemije, kemijske tehnologije, tekstilne tehnologije in montanistike na FNT, predavanja iz Teorije mere ter več seminarjev za študente matematike. Vrsto let je imel predavanja iz Analize I in Analize II, nato iz Matematike III in IV za študente fizike. Imel je predavanja iz Funkcionalne analize za študente matematike. Predaval je tudi Linearno algebro na univerzitetnem študiju računalništva na Fakulteti za računalništvo in informatiko. Večkrat je predaval na podiplomskem študiju (raziskovalna smer), in sicer C*-algebre ter Linearne topološke prostore. Bil je eden od nosilcev predmeta Sodobne metode poučevanja matematike na Pedagoški smeri podiplomskega študija. Od leta 1980 je vodil podiplomski seminar iz Analize. Ko se je ta razcepil, je do spomladi 2008 vodil podiplomski seminar iz funkcionalne analize, na katerem je tudi veliko predaval. Bil je mentor pri 43 diplomskih delih in pri dveh višješolskih diplomskih nalogah. Prav tako je bil mentor pri treh magistrskih delih in komentor pri enem magistrskem delu ter komentor pri dveh doktoratih.

Peter Legiša je opravljal tudi številne funkcije. V akademskih letih 1991/92 in 1992/93 je bil predstojnik Oddelka za matematiko in mehaniko FNT. Od leta 1980 je sodeloval pri izdelavi učnih načrtov ter katalogov znanj za matematiko v srednji šoli. V letih 1992–96 je bil predsednik Republiške predmetne maturitetne komisije za matematiko. V letih 1995–1999 je zastopal matematiko in deloma naravoslovje v Nacionalnem kurikularnem svetu in v Področni kurikularni komisiji za gimnazije. V letih 1999–2007 je bil član Komisije za dodiplomski študij Senata Univerze v Ljubljani. Na vseh teh funkcijah se je uspešno zavzemal za pomembnost matematike v izobraževanju.

V letu 1994 je sodeloval pri organizaciji 1. kongresa matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Kot predsednik nacionalnega komiteja za matematiko pri DMFA (1994–2004) je opravil večino dela pri vzpostavitvi recipročnosti z American Mathematical Society (AMS), kar je našim članom dalj časa omogočalo članstvo v tem društvu za izredno nizko ceno. Prav tako je vzpostavil sodelovanje z European Mathematical Society (EMS) in International Mathematical Union (IMU) in se udeleževal njihovih srečanj. O tem je redno poročal v OMF in biltenih društva.

Veliko odgovornega dela je Peter Legiša opravil in še opravlja kot glavni urednik našega glasila OMF (2012–2017) in kot glavni urednik Preseka (2012–2017).

Svoje bogato strokovno znanje vedno rad deli s študenti in kolegi, bodisi na društvenih seminarjih ali drugih srečanjih, kot velik ljubitelj narave pa aktivno sodeluje tudi v Društvu za opazovanje in proučevanje ptic (DOPP).

Jana Draksler, prejemnica priznanja DMFA Slovenije

Jana Draksler poučuje matematiko na OŠ Frana Kranjca v Celju že 22 let, prej pa je 13 let poučevala na OŠ Hudinja Celje. Ima strokovni naziv svetnica. Ves čas spremlja novosti pri poučevanju in jih uspešno vključuje ne le v redni pouk, temveč tudi v krožke in priprave dijakov na tekmovanja. Učno snov podaja sistematično in razumljivo in s tem omogoča učencem uspešno nadaljnje šolanje.

Jana Draksler je soavtorica štirih učbenikov, delovnih zvezkov in priročnikov za učitelje za matematiko v osnovni šoli: *Skrivnosti števil in oblik* 6, 7, 8 in 9, je soavtorica kompleta *Plonk za matematiko*, je tudi soavtorica zbirke vaj za pripravo na nacionalno preverjanje znanja iz matematike: *Znam za več +* .

Kar 30 let je mentorica mladim raziskovalcem pri pripravi več kot 35 raziskovalnih nalog, ki so se redno uvrščale med najboljše, tako v občinskem kot v državnem merilu, 27 let je članica občinske komisije *Mladi za Celje*, večkrat je bila organizatorica področnih in državnih tekmovanj s področja matematike in logike.

Leta 2004 je na strokovnem srečanju DMFA Slovenije v Cerknem predstavila projekt *Brihtne bučke*. Je avtorica dveh obsežnejših razstav o življenju in delu Jurija Vege in Alberta Einsteina (šolska avla 2004 in 2005), mentorica mladim tekmovalcem na tekmovanjih iz matematike, logike, razvedrilne matematike in na drugih novejših tekmovanjih s področja matematike in logike (bober, logična pošast, genius logicus, prvaki znanja), na katerih so njeni učenci redno osvajali zlata in srebrna priznanja ter nagrade na državni ravni. Zanima jo tudi svet znamk in je mentorica mladim filatelistom.

Jana Draksler je predana učiteljica in si vedno najde čas za dodatno razlago tako težje učečim se učencem kot tudi nadarjenim in vedoželjnim tekmovalcem. Svoje obširno znanje in bogate izkušnje je vedno pripravljena deliti tudi z drugimi mentorji mladim tekmovalcem.

Dr. Marko Jagodič, prejemnik priznanja DMFA Slovenije

Doc. dr. Marko Jagodič je končal študij enopredmetne fizike na Pedagoški fakulteti Univerze v Mariboru. Doktoriral je leta 2010 na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru (UM FNM), na področju raziskav magnetizma v kvazikristalih.

Že od leta 2005 je vključen v pedagoško delo na UM FNM pri različnih predmetih na študiju fizike. Nekaj let je vodil tudi vaje iz fizike na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Od leta 2013 je redno zaposlen na II. gimnaziji v Mariboru, kjer uči fiziko na splošnem programu in programu mednarodne mature, raziskovalno pa je aktiven na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani.

Z delom DMFA je tesno povezan od leta 2008, ko je prvič sodeloval pri organizaciji in izvedbi raziskovalnih dnevov za srednješolce na Bledu. Na raziskovalne dneve v Plemljevo vilo na Bledu DMFA Slovenije vsako leto povabi 16 najuspešnejših dijakov z državnega tekmovanja v znanju fizike. Marko Jagodič že vrsto let skrbi, da raziskovalni dnevi odlično potekajo. Sam opravi vsa potrebna administrativna dela, vodi delavnice in če je treba, pripravlja tudi obroke za udeležence. Z dijaki se pogovarja tudi o študiju fizike na fakultetah in jih navdušuje za nadaljnji študij ne le fizike, temveč tudi drugih naravoslovnih ved in matematike.

Enako odlično opravlja pedagoško poslanstvo tudi na II. gimnaziji Maribor. Vsako leto pripravi več raziskovalnih nalog, ki jih pod njegovim vodstvom izvedejo dijaki. O izredno kakovostnem mentorskem delu pričajo priznanja na državnih srečanjih s področja fizike, zlasti pa nagrada, ki sta jo prejela dijaka pod njegovim mentorstvom na mednarodnem sejmu znanosti in tehnike (Intel ISEF) leta 2015.

Poleg neposrednega dela z mladimi je Marko Jagodič avtor poljudnih člankov v reviji Življenje in tehnika ter dnevniku Večer in tako skrbi za popularizacijo fizike med mladimi in širše v javnosti.

Zinka Muhič, prejemnica priznanja DMFA Slovenije

Zinka Muhič je diplomirala na Pedagoški akademiji. Kot predmetna učiteljica matematike in fizike se je zaposlila na OŠ Katja Rupena (danes OŠ Center), kjer dela že dobrih 38 let. Vsa leta poučuje matematiko v višjih razredih osnovne šole, po potrebi pa tudi fiziko.

Pod njenim mentorstvom so številni učenci osvojili zlata priznanja iz matematike, logike, razvedrilne matematike, matemčka in iz logičnih pošasti.

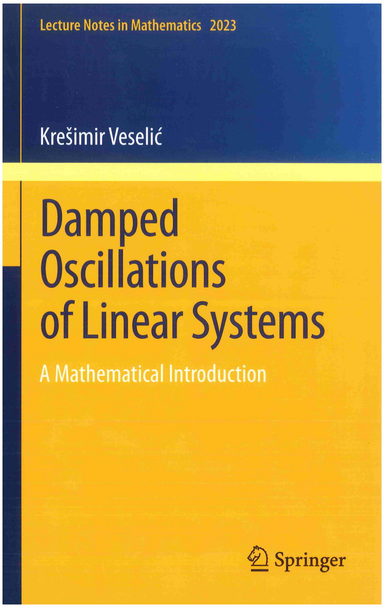
Pri delu z nadarjenimi učenci jo je najbolj pritegnilo področje razvedrilne matematike, kjer učenci širijo in poglabljajo znanje matematike, utrjujejo algoritmično mišljenje, računske spretnosti in prostorsko predstavljivost, sistematično in logično sklepajo ter se navajajo na samostojno raziskovalno delo in uporabo matematične literature. Dobre strategije reševanja nalog, ki jih odkriva z zavzetim delom, uspešno posreduje ne le svojim učencem, temveč tudi kolegom in študentom Pedagoške fakultete.

Kot uspešna mentorica je ob 20-letnici tekmovanj iz logike, leta 2005, prejela priznanje Zveze za tehnično kulturo Slovenije. Vrsto let je popravljala naloge z državnih tekmovanj iz logike, tri leta je bila članica državne komisije za pripravo nalog iz matematike za osnovnošolce pri DMFA. Vsa leta je prizadevno sodelovala v komisijah za tekmovanja na matematičnem področju. Aprila letos je prejela nagrado Mestne občine Novo mesto za pomembnejše trajne uspehe na vzgojno-izobraževalnem področju.

Ves čas službovanja skrbi za lastno strokovno izpopolnjevanje, redno se udeležuje študijskih skupin in strokovnih seminarjev, ki jih organizirajo Zavod za šolstvo in šport, DMFA Slovenije in organizatorji posameznih tekmovanj. S svojim delom na šoli in zunaj nje skrbi za popularizacijo matematike med mladimi.

Na podlagi predlogov pripravila Nada Razpet

Krešimir Veselić, Damped Oscillations of Linear Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011, 212 strani.



Knjiga je posvečena obravnavi dinamičnih sistemov, ki jih lahko opišemo s sistemom navadnih diferencialnih enačb

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t). \tag{1}$$

Z $x = x(t)$ je označena vektorska funkcija časa oziroma pot $t \mapsto x(t)$ v $\mathbb{R}^n$. Vse tri matrike M, C in K so *konstantne*, realne in simetrične, $f(t)$ pa je vektor nehomogenosti. Matriki M in K sta največkrat pozitivno definitni, C pa ne. Z zgornjo enačbo lahko opisujemo majhna nihanja mnogih zanimivih sistemov, ki jih najdemo v naravi, predvsem pa v teoriji kontrole, strukturni mehaniki in mnogih drugih vejah inženirstva. Znana primera sta zaporedje poveznih mas, vzmeti ter dušilcev in zaporedje skupaj postavljenih krogotokov, ki vsebujejo po dve tuljavi, kondenzator in upor. Sosednji krogotoki so sklopljeni z medsebojno indukcijo. V prvem primeru je dušenje podano z dušilci, v drugem pa z upori.

S stališča teoretičnega matematika je enačba (1) enostavna. Je linearna in koeficienti so konstantni. Torej jo znamo analitično rešiti. Kot že rečeno, pa se za tako enačbo zanimajo zlasti inženirji in aplikativni znanstveniki. Ti pa potrebujejo konkretne, numerične rešitve in ne le simbolično zapisanih analitičnih. Poleg tega hočejo delovanje sistema tudi razumeti. Strukturnega mehanika lahko na primer zanima, kam v sistem bi moral vstaviti dušilec, da bi čim bolj učinkovito odpravil neželene vibracije sistema. Če rešimo sistem (1) v prvotnih koordinatah, bomo verjetno dobili zelo zapleteno krivuljo v $\mathbb{R}^{2n}$, iz katere bomo težko kaj pametnega razbrali. Ljudje so od nekdaj poskušali razumeti zapletena gibanja v naravi tako, da so si predstavljali, da so na neki način sestavljena iz enostavnih gibanj. Zelo star primer takega gledanja so antični poskusi razložiti gibanje planetov s cikli, epicikli, epiepicikli … Zelo velik korak je v teh naporih napravil Joseph Fourier, ko je časovni razvoj porazdelitve toplote v telesu opisal kot vsoto (superpozicijo) harmoničnih nihanj. Na mnoga gibanja v naravi in tehniki je dejansko smiselno gledati kot na superpozicije enostavnih nihanj. Če so opazovana gibanja sistema majhna, torej, če se sistem le malo oddaljuje od kake svoje ravnovesne lege, lahko ta gibanja dovolj verodostojno opisujemo z linearnimi diferencialnimi enačbami oziroma s sistemi linearnih diferencialnih enačb.

Cilj Veseličeve knjige je priprava teoretičnih orodij, s pomočjo katerih bo lahko numerični matematik sistem (1) učinkovito in predvsem *zanesljivo* predstavil kot superpozicijo razklopljenih enostavnih sistemov in nato sistem rešil. Na ta način bo dobil zanesljive in verodostojne rešitve in tudi razumevanje sestave sistema. V knjigi ni numeričnih algoritmov, so pa teoretična orodja, ki konstrukcijo kvalitetnih numeričnih algoritmov omogočajo. S pomočjo teh orodij lahko numerični matematik identificira tiste konfiguracije parametrov, ki lahko vodijo do nesmiselnih numeričnih rešitev. Z dodatno pazljivostjo se bo torej lahko nesmiselnim rešitvam izognil.

Knjiga je napisana zelo jasno in natančno. Kljub temu, da prinaša zahtevno in aktualno snov, je zelo berljiva, saj ne zahteva posebnega predznanja. Vse potrebno je razloženo sproti. Knjigo lahko bere vsak študent matematike ali fizike, ki ima za seboj tretji letnik bolonjskega študija. Vendar je za razumevanje pomembnosti in dejanskega pomena rezultatov potrebna solidna mera »matematične kulture«. Med matematiki, ki se jim avtor zahvaljuje za koristne komentarje in popravke rokopisa knjige, najdemo tudi našega profesorja Antona Suhadolca. Profesor Suhadolc je s svojimi odličnimi predavanji o diferencialnih enačbah navduševal mnoge generacije matematikov, med njimi tudi pisca teh vrstic.

Knjigo priporočamo v branje vsem, ki jih zanimajo numerični problemi reševanja diferencialnih enačb in vloga, ki ju imata linearna algebra in linearna geometrija na tem področju.

Za tiste, ki jih zanima, opišimo tematiko knjige nekoliko podrobneje.

Matrike M, C in K so konstantne, torej znamo sistem (1) analitično rešiti. Sistem (1) n enačb drugega reda prevedemo na sistem $2n$ enačb prvega reda po običajnem postopku. Vpeljemo novo neodvisno vektorsko spremenljivko $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$, kjer je

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}.$$

Tedaj je $x(t)$ rešitev (1) natanko takrat, ko je $y(t)$ rešitev homogenega sistema

$$\dot{y} = By + g(t), \tag{2}$$

kjer je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{pmatrix}.$$

Ker je B konstantna matrika, dobimo splošno rešitev enačbe (2) z eksponenciacijo tB in nato z variacijo konstante. Torej

$$y(t) = \mathrm{Exp}(tB)\cdot c + \int_0^t \mathrm{Exp}((t-\tau)B)\cdot g(\tau)d\tau, \quad c \in \mathbb{R}^{2n} \text{ poljubna konstanta.} \tag{3}$$

V tej uvedbi novih spremenljivk zamenjamo opazovanje rešitvenih krivulj $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ v konfiguracijskem prostoru $\mathbb{R}^n$, ki parametrizira lege sistema, z opazovanjem rešitvenih krivulj $(x(t), \dot{x}(t))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ v faznem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$, ki parametrizira »prava« stanja sistema. Ta uvedba novih spremenljivk je srž Hamiltonovega formalizma. Pri dovolj splošnih izbirah matrik M, C in K in pri večini izbir začetnih pogojev $c = (x(0), \dot{x}(0))$ so rešitve $y(t)$, podane s (3), zelo zapletene krivulje v $\mathbb{R}^{2n}$. Neposredno opazovanje teh krivulj nam običajno ne da dobrega vpogleda v način delovanja sistema (1). Zato poskušamo poiskati take koordinate prostora $\mathbb{R}^{2n}$, da bodo v teh koordinatah naše rešitve enostavnejše, laže razumljive krivulje. Natančneje, zapleteno gibanje $y(t)$ poskušamo prikazati kot razumljivo superpozicijo več enostavnih, razklopljenih gibanj. V primeru, ko so vse tri matrike M, K in C hkrati diagonalizabilne glede na relacijo kongruentnosti, lahko sistem razklopimo kar v konfiguracijskem prostoru. Naj bo P prehodna matrika, za katero so $P^T\, M\, P$, $P^T\, K\, P$ in $P^T\, C\, P$ diagonalne, in naj bo $P \cdot \xi = x$. Tedaj je sistem (1) ekvivalenten sistemu n med seboj neodvisnih skalarnih enačb

$$\mu_j\, \ddot{\xi}_j + \gamma_j\, \dot{\xi}_j + \kappa_j\, \xi_j = g_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pri tem je $(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))^T = P^T \cdot f(t)$ in

$$P^T M P = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad P^T K P = \mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n),$$
$$P^T C P = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Sistem se torej razklopi v n neodvisnih dušenih harmoničnih nihanj s spodbujanji g_j v eni prostorski dimenziji. Čeprav sta dve realni simetrični matriki vedno hkrati diagonalizabilni v smislu kongruentnosti, pa generična izbrana trojica takih matrik ni diagonalizabilna v tem smislu z eno samo prehodno matriko. Razklopitev zgornje oblike dobimo torej le izjemoma. V splošnem je zato bolj smiselno sistem poenostavljati v faznem prostoru.

Predpostavimo, da je matrika B diagonalizabilna v običajnem smislu. V faznem prostoru sistem (2) razklopimo tako, da diagonaliziramo matriko B. Sistem (2) razpade na $2n$ neodvisnih linearnih diferencialnih enačb prvega reda

$$\dot{\eta}_i = \alpha_i \eta_i + \phi_i(t), \quad i = 1, \ldots 2n,$$

pri čemer so α_i lastne vrednosti matrike B.

Na prvi pogled torej izgleda, da nam naš problem ne bo povzročal prevelikih preglavic. Vendar ni tako. Če hočemo zgornjo razklopitev za neki konkreten sistem poiskati numerično, lahko zaidemo v težave. Reševanje lastnega problema (zlasti velikih) matrik je s stališča numerične matematike zelo težak problem. Seveda pa so različne vrste matrik v tem pogledu različno »neprijetne«. Spomnimo se, da je kvadratna matrika N normalna, če zanjo velja $N^T N = N N^T$. Znano je, da je reševanje lastnega problema za nenormalne matrike bolj zahtevno kot za normalne. Odstopanje matrike od normalnosti lahko na enostaven način kvantitativno merimo. In bolj ko matrika odstopa od normalnosti, težji je numerični lastni problem za to matriko.

Sistem (1) lahko prevedemo na sistem prvega reda na veliko načinov. Naj bosta W_1 in W_2 poljubni realni obrnljivi $n \times n$ matriki. Nove koordinate $z = (z_1, z_2)$ lahko vpeljemo s predpisom

$$z_1 = W_1 x, \quad z_2 = W_2 \dot{x}. \tag{4}$$

Matrika koeficientov sistema se v teh koordinatah glasi

$$F = \begin{pmatrix} 0 & W_1 W_2^{-1} \\ -W_2 M^{-1} K W_1^{-1} & -W_2 M^{-1} C W_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Glede na vlogo normalnosti bi radi izbrali taki matriki W_1, W_2, da bo matrika F čim manj odstopala od normalnosti. To dosežemo takole: Naj bosta

$$K = L_1 L_1^T, \quad M = L_2 L_2^T \tag{5}$$

poljubna razcepa matrik M in K iz (1). Če v (4) vzamemo za W_1 matriko L_1 in za W_2 matriko L_2, dobimo za matriko F izraz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_1 L_2^{-T} \\ -L_2^{-1} L_1 & -L_2^{-1} C L_2^{-T} \end{pmatrix}.$$

V knjigi je dokazan zanimiv in pomemben izrek, ki pravi sledeče: med vsemi matrikami F matrika A najmanj odstopa od normalnosti. Pri tem sta razcepa (5) poljubna. Lahko gre za razcep Holeskega, za pozitivno definitna korena, ali pa za kak drug razcep. Poleg minimalnega odstopanja od normalnosti ima matrika A še eno zelo pomembno lastnost. Je namreč J-simetrična. To pomeni,

$$J \cdot A \cdot J = A^T, \quad J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

kjer je I enotska matrika dimenzije $n \times n$. Lahko je videti, da ima diagonalizabilna J-simetrična matrika J-ortogonalen sistem lastnih vektorjev. Vektorja v_1, v_2 sta J-ortogonalna, če zanju velja

$$\langle v_1, v_2 \rangle_J = (v_1)^T J v_2 = 0.$$

Nedefinitnost psevdoskalarnega produkta $\langle -, - \rangle_J$ je vzrok mnogih težav pri numeričnem reševanju lastnih problemov J-simetričnih matrik. Če je matrika dušenja C enaka nič, potem je matrika A simetrična in te težave izginejo. Dušenje je torej vir pomembnih numeričnih problemov pri obravnavi sistema (1). Glavnina knjige je namenjena linearno algebraični in linearno geometrijski obravnavi J-simetričnosti. Knjiga sicer ne ponuja konkretnih numeričnih rešitev in algoritmov. So pa v njej navedena mnoga dejstva o J-simetričnosti, ki so lahko zelo koristna za matematika, ki poskuša čim bolje numerično reševati lastne probleme matrik, kakršna je zgoraj navedena matrika A, pa tudi bolj splošnih J-simetričnih matrik.

Pavle Saksida

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2017
Letnik 64, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

CONTENTS

Articles **Pages**

Na naslovnici: Ena od konstrukcij trikotnika z dano osnovnico, višino in razliko kotov ob osnovnici; glej članek na straneh 161–170.