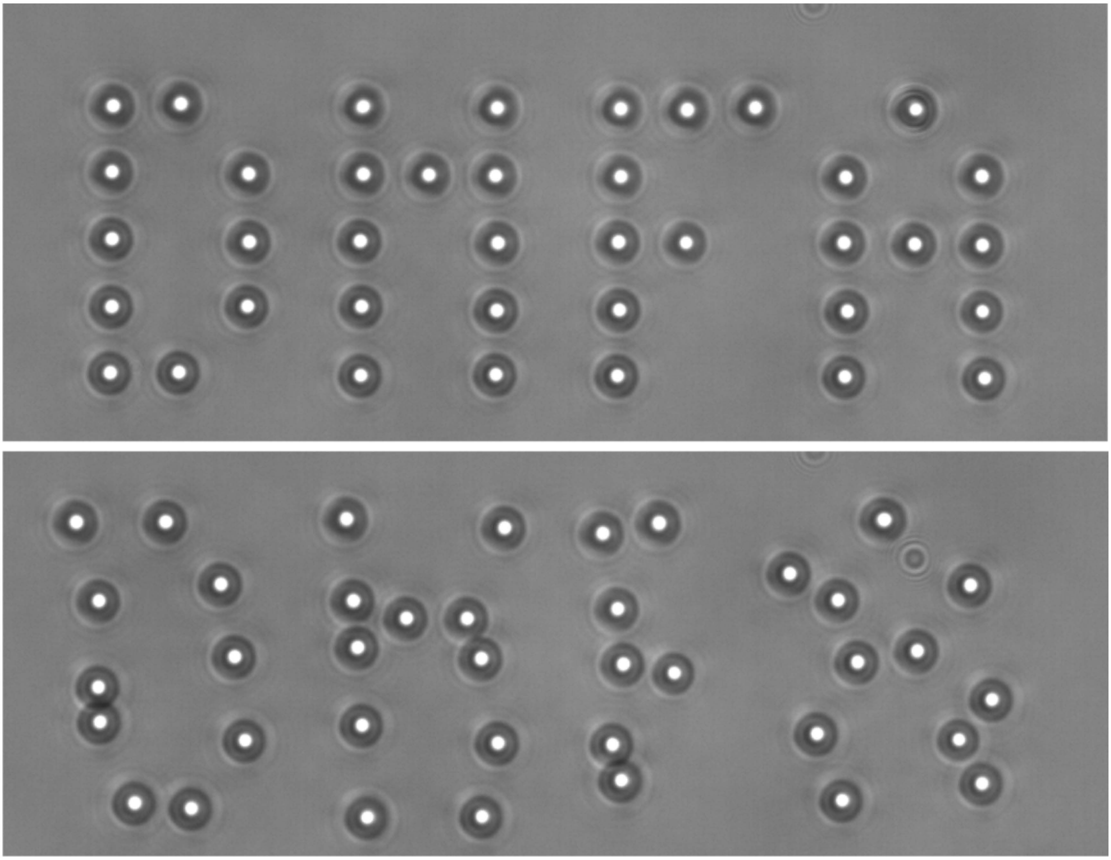
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2018
Letnik 65
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 65 • ŠT. 5 • STR 161-200 • SEPTEMBER 2018

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 208, letnik 65, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

POTENCE KOVINSKIH RAZMERIJ

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11A55, 11B39

V prispevku pokažemo, kako se izražajo cele potence kovinskih razmerij v obliki periodičnih verižnih ulomkov.

POWERS OF METALLIC RATIOS

In this contribution we show how the integer powers of metallic ratios can be expressed by periodic continued fractions.

Uvod

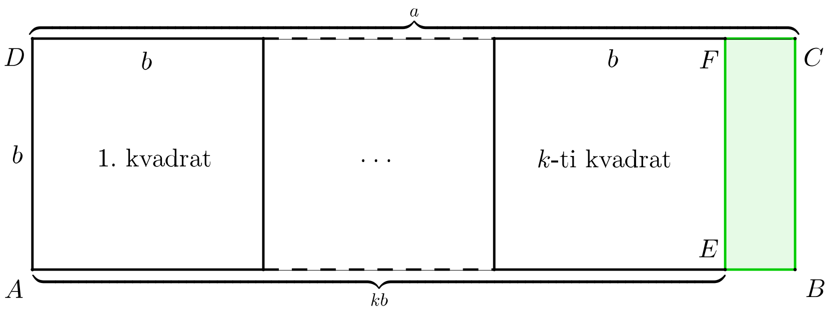
V zadnjih desetletjih je z razvojem teorije dinamičnih sistemov nastalo več del, na primer [2, 4, 5], ki obravnavajo kovinska razmerja kot posplošitve bolj znanega zlatega razmerja, ki ga navadno srečamo pri zlatem rezu, pa tudi njihovo uporabo, na primer v [1]. V članku želimo predstaviti nekaj lastnosti kovinskih razmerij. Za razumevanje je treba znati nekaj geometrije in elementarne algebre, reševati homogene linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti ter osnove teorije o verižnih ulomkih, s katerimi bomo izrazili potence s celimi eksponenti kovinskih razmerij.

Kovinski pravokotniki

Vzemimo pravokotnik $ABCD$ s stranicama $a = |AB|$ in $b = |BC|$, pri čemer je $a > b$ in a/b ni naravno število (slika 1).

Od stranice AD proti stranici BC lahko od pravokotnika odrežemo $k = \lfloor a/b \rfloor$ ($\lfloor u \rfloor$ pomeni celi del realnega števila u) kvadratov s stranico b, tako da ob stranici BC ostane manjši pravokotnik $BCFE$. Zanima nas, kdaj je pravokotnik $BCFE$ podoben pravokotniku $ABCD$. Pogoj za podobnost je seveda enakost

$$\frac{a - kb}{b} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$



Slika 1. Kovinski pravokotnik.

Takoj vidimo, da razmerje $\sigma_k = a/b$ zadošča kvadratni enačbi $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$, ki ima rešitvi

$$\lambda_1 = \sigma_k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2+4}) \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \hat{\sigma}_k = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2+4}). \tag{2}$$

Pozitivno rešitev σ_k imenujemo *kovinsko razmerje reda k* ali *kovinsko sredino reda k*. Iskani pravokotnik ima potemtakem stranici v kovinskem razmerju reda k, to je $a/b = \sigma_k$. Tak pravokotnik imenujemo *kovinski pravokotnik reda k*. V posebnem primeru imamo števila

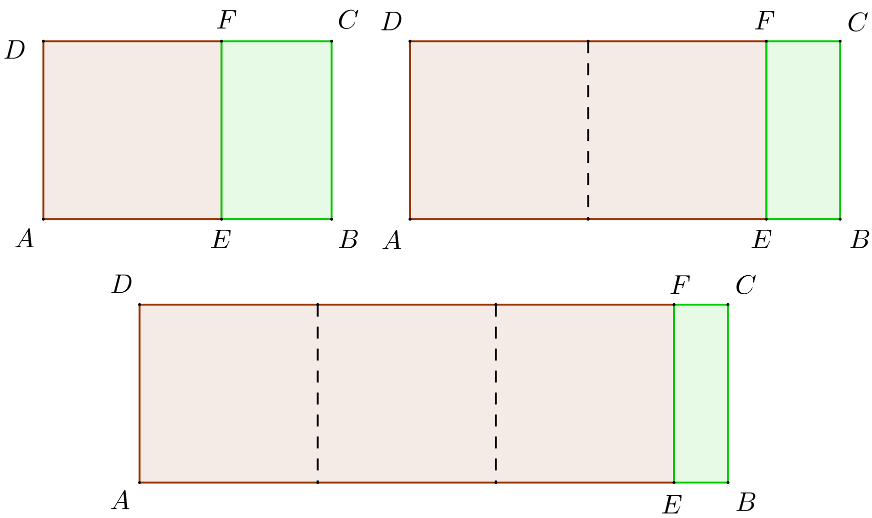
$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \sigma_2 = 1+\sqrt{2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{13}), \tag{3}$$

ki jih v tem vrstnem redu in v skladu s tremi najboljšimi športnimi uvrstitvami imenujemo *zlato, srebrno in bronasto razmerje*. Namesto besede *razmerje* uporabljamo tudi besedi *število* in *sredina*. Ustrezni pravokotniki so *zlati, srebrni in bronasti pravokotnik* (slika 2).

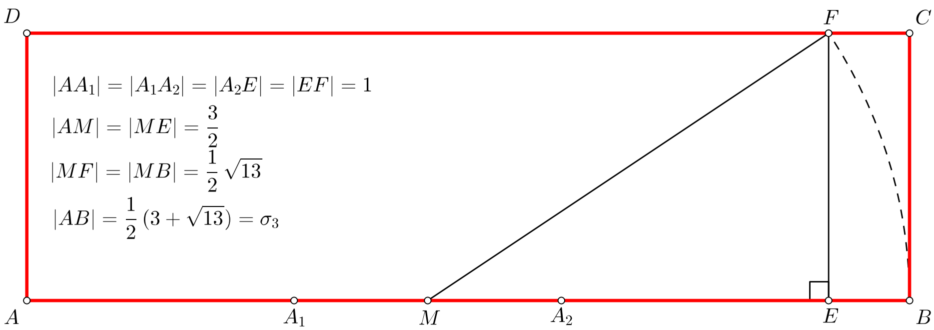
Manjši pravokotnik $BCFE$ je seveda, tako kot pravokotnik $ABCD$, tudi kovinski pravokotnik reda k. Od pravokotnika $BCFE$ lahko tudi odrežemo k kvadratov s stranico $a - kb$, tako da ostane še manjši kovinski pravokotnik reda k. Postopek lahko nadaljujemo v nedogled. To pomeni, da v kovinskih pravokotnikih obstaja neka fraktalna struktura.

Evklidska konstrukcija kovinskega pravokotnika reda k pri dani stranici b je preprosta. Sledi neposredno iz zapisa σ_k v obliki

$$\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}.$$



Slika 2. Zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.



Slika 3. Konstrukcija bronastega pravokotnika.

Na sliki 3 je narejen primer bronastega pravokotnika za $b = 1$.

Podobno kot delimo daljico AB v zlatem rezu, jo lahko delimo tudi v srebrnem in bronastem rezu, na splošno s točko R_k v rezu reda k. Veljati mora: $|AR_k|/|R_kB| = \sigma_k$. Preprost račun pokaže, da je

$$|AR_k| = \frac{\sigma_k - 1}{k}|AB|, \quad |R_kB| = \frac{k + 1 - \sigma_k}{k}|AB|.$$

Da pa se daljico AB razdeliti v rezu reda k tudi z geometrijsko konstrukcijo.

Ni težko videti, da je $k < \sigma_k < k + 1$ za vsako naravno število k. To dokažemo s kratkim zaporedjem relacij:

$$k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2}) < \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2+4}) = \sigma_k < \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2+4k+4}) = k+1.$$

Zato, ker je število σ_k med k in $k+1$, je zanj smiselno uporabljati izraz *sredina*. Ker sta σ_k in $\hat{\sigma}_k$ rešitvi kvadratne enačbe $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$, zanju veljata Viètovi formuli $\sigma_k + \hat{\sigma}_k = k$, $\sigma_k \hat{\sigma}_k = -1$. Za dovolj velik k je razlika med σ_k in k poljubno majhna:

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k - k) = \lim_{k\to\infty}(-\hat{\sigma}_k) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+4} - k) = 0.$$

Število (diskriminanta) k^2+4 za noben naraven k ni kvadrat, kot sledi iz relacije

$$k < \sqrt{k^2+4} < \sqrt{k^2+4k+4} = k+2.$$

Če bi bilo število $\sqrt{k^2+4}$ naravno, bi to šlo samo v primeru $\sqrt{k^2+4} = k+1$, kar pa vodi v protislovje $2k = 3$. Od tod sledi, da so vsa kovinska števila σ_k iracionalna.

Razvoj v verižni ulomek

Kovinsko razmerje ima lep razvoj v (enostaven, navaden, pravilen) verižni ulomek. Vsako necelo realno število ξ lahko zapišemo v obliki

$$\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Pri tem so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ naravna števila, $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ pa celo število. Za cela realna števila tak zapis nima smisla. Verižni ulomek po dogovoru označujemo krajše takole:

$$\xi = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Naj bo $\xi > 1$. Tedaj je očitno $a_0 > 0$ in

$$\frac{1}{\xi} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

Za $0 < \xi < 1$ je $a_0 = 0$ in

$$\frac{1}{\xi} = [a_1; a_2, a_3, \ldots].$$

Racionalna števila imajo končen, iracionalna pa neskončen razvoj v verižni ulomek. Pri končnih verižnih ulomkih vzamemo najkrajši zapis, v katerem je zadnji člen na desni strani podpičja 2 ali več. Neskončen verižni ulomek oblike

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}, \ldots]$$

imenujemo *periodičen s periodo dolžine p*. Krajše ga zapišemo v obliki

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}}].$$

Števila $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sestavljajo *predperiodo*. Vsaka kvadratna iracionala $(a+\sqrt{b})/c$, kjer sta a in $c \neq 0$ celi števili, b pa naravno število, ki ni kvadrat, ima razvoj v periodični verižni ulomek. Samo števila, ki so pravkar opisane kvadratne iracionale, imajo razvoje v periodične verižne ulomke. Več o tem najdemo v obširni matematični literaturi, na primer v [6].

Verižni ulomek za σ_k dobimo zelo enostavno iz zveze $\sigma_k^2 - k\sigma_k - 1 = 0$, če jo prepišemo v obliko $\sigma_k = k + 1/\sigma_k$:

$$\sigma_k = k + \frac{1}{\sigma_k} = k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\sigma_k}} = [k; \overline{k}].$$

Kovinska razmerja lahko povežemo z Gaußovo preslikavo $G : [0,1) \to [0,1)$, ki je definirana s predpisom $G(x) = \{1/x\}$ za $x \in (0,1)$ in $G(0) = 0$. Pri tem pomeni $\{u\}$ ulomljeni del števila u, to se pravi $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$. Negibna točka preslikave G je po definiciji vsako tako število $\xi \in [0,1)$, za katero je $G(\xi) = \xi$.

Ker veljata relaciji $k < \sigma_k < k+1$ in Vietovi formuli za σ_k in $\hat{\sigma}_k$, dobimo

$$G(1/\sigma_k) = \{\sigma_k\} = \sigma_k - k = -\hat{\sigma}_k = 1/\sigma_k.$$

Preslikava G ima zato neskončno mnogo netrivialnih negibnih točk, in sicer $\xi_k = 1/\sigma_k$. Števila $1/\sigma_k$ so vse negibne točke preslikave G, česar ni težko utemeljiti, dokaz pa najdemo na primer v [3].

Verižni ulomki za negibne točke preslikave G so

$$\xi_k = [0; k, k, k, \ldots] = [0; \overline{k}].$$

Potence kovinskih razmerij

Zanimajo nas potence σ_k^n kovinskih razmerij za naravne eksponente n. Videli bomo, da se te potence da izraziti s periodičnimi verižnimi ulomki. To ni presenetljivo, saj je potenca z naravnim eksponentom kvadratne iracionale tudi tako število, kar je izraženo s spodnjim zapisom potence. Posebej pa moramo obravnavati potence z lihimi in sodimi eksponenti.

Potencam je ne glede na parnost eksponenta skupna oblika. Nedvomno je ta oblika

$$\sigma_k^n = E_n(k) + F_n(k)\sigma_k,$$

kjer so $E_n(k)$ in $F_n(k)$ neka racionalna števila. Očitno je $E_0(k) = 1$ in $E_1(k) = 0$ ter $F_0(k) = 0$ in $F_1(k) = 1$. Ker pa za $n \geq 0$ velja $\sigma_k^{n+2} = k\sigma_k^{n+1} + \sigma_k^n$, imamo enakost

$$E_{n+2}(k) + F_{n+2}(k)\sigma_k = kE_{n+1}(k) + kF_{n+1}(k)\sigma_k + E_n(k) + F_n(k)\sigma_k.$$

Zaradi enoličnosti zapisa morata veljati relaciji:

$$E_{n+2}(k) = kE_{n+1}(k) + E_n(k) \quad \text{in} \quad F_{n+2}(k) = kF_{n+1}(k) + F_n(k).$$

Začetka zaporedij $\{E_n(k)\}_{n=0}^{\infty}$ in $\{F_n(k)\}_{n=0}^{\infty}$ sta naslednja:

$$\begin{aligned} E_n(k) &: \quad 1, 0, 1, k, k^2+1, k^3+2k, k^4+3k^2+1, \ldots, \\ F_n(k) &: \quad 0, 1, k, k^2+1, k^3+2k, k^4+3k^2+1, \ldots \end{aligned}$$

Števila $F_n(k)$ imenujemo *k-Fibonaccijeva*[1] *števila*. Tudi števila $E_n(k)$ so k-Fibonaccijeva: $E_n(k) = F_{n-1}(k)$. Smiselno je vzeti $E_{-1}(k) = -k, F_{-1}(k) = 1$, kar je tudi v skladu z enakostjo $\sigma_k^{-1} = -\hat{\sigma}_k = -k + \sigma_k$. Tako smo našli:

$$\sigma_k^n = F_{n-1}(k) + F_n(k)\sigma_k. \tag{4}$$

Za $k = 1$ so števila $F_n = F_n(1)$ običajna Fibonaccijeva števila. Prav tako dobimo

$$\hat{\sigma}_k^n = F_{n-1}(k) + F_n(k)\hat{\sigma}_k. \tag{5}$$

Če odštejemo (5) od (4) in upoštevamo enakost $\sigma_k - \hat{\sigma}_k = \sqrt{k^2+4}$, najdemo eksplicitni izraz za k-Fibonaccijeva števila, tako imenovano *Binetovo*[2]

[1] Fibonacci, Leonardo iz Pise (okoli 1170–1250), je bil italijanski matematik.

[2] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) je bil francoski matematik, astronom in fizik.

formulo:

$$F_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}(\sigma_k^n - \hat{\sigma}_k^n). \tag{6}$$

Do rezultata (6) lahko pridemo tudi, če rešimo diferenčno enačbo $F_{n+2}(k) = kF_{n+1}(k) + F_n(k)$ po običajnem postopku z nastavkom $F_n(k) = \lambda^n$, karakteristično enačbo $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$ s korenoma $\lambda_1 = \sigma_k, \lambda_2 = \hat{\sigma}_k$, linearno kombinacijo $C_1\sigma_k^n + C_2\hat{\sigma}_k^n$ obeh rešitev ter z upoštevanjem začetnih pogojev $F_0(k) = 0$ in $F_1(k) = 1$.

S k-Fibonaccijevimi števili so tesno povezana k-Lucasova[3] števila $L_n(k)$, ki jih vpeljemo s prav tako diferenčno enačbo kot k-Fibonaccijeva števila, to je $L_{n+2}(k) = kL_{n+1}(k) + L_n(k)$, toda pri začetnih pogojih $L_0(k) = 2$ in $L_1(k) = k$. Za rešitev dobimo s prej opisanim postopkom ustrezno Binetovo formulo

$$L_n(k) = \sigma_k^n + \hat{\sigma}_k^n. \tag{7}$$

Iz diferenčne enačbe in začetnih pogojev induktivno sledi, da so vsa števila $F_n(k)$ in $L_n(k)$ naravna, le $F_0(k)$ je za vse k enak 0.

Z relacijama $F_{-n}(k) = (-1)^{n+1}F_n(k)$ in $L_{-n}(k) = (-1)^n L_n(k)$ razširimo zaporedji k-Fibonaccijevih in k-Lucasovih števil v dvostranski zaporedji. Enakosti (4) in (5) potem veljata za vsako celo število n. Prav tako Binetovi formuli (6) in (7), iz katerih dobimo še

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}(k)}{F_n(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+r}(k)}{L_n(k)} = \sigma_k^r$$

za vsako celo število r.

Z upoštevanjem Viètovih formul lahko izrazimo iz (5) tudi potence z negativnimi celimi eksponenti:

$$\sigma_k^{-n} = (-1)^n(F_{n+1}(k) - F_n(k)\sigma_k). \tag{8}$$

Za števila $F_n(k)$ in $L_n(k)$ velja več identitet. Omenimo samo eno, ki jo bomo potrebovali:

$$(k^2+4)F_n^2(k) = L_n^2(k) + 4(-1)^{n+1}. \tag{9}$$

Enakost (9) preverimo neposredno z Binetovima formulama (6) in (7):

$$\begin{aligned}(k^2+4)F_n^2(k) &= (\sigma_k^n - \hat{\sigma}_k^n)^2 = \sigma_k^{2n} + \hat{\sigma}_k^{2n} - 2\sigma_k^n\hat{\sigma}_k^n \\ &= (\sigma_k^n + \hat{\sigma}_k^n)^2 - 4(\sigma_k\hat{\sigma}_k)^n = L_n^2(k) + 4(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

[3]François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) je bil francoski matematik.

V primeru lihega indeksa imamo:

$$(k^2+4)F_{2n+1}^2(k) = L_{2n+1}^2(k) + 4. \tag{10}$$

Sedaj izračunajmo σ_k^{2n+1}. Ker je $\sigma_k^{2n+1}+\hat{\sigma}_k^{2n+1} = L_{2n+1}(k)$ in $\sigma_k^{2n+1}\hat{\sigma}_k^{2n+1} = (\sigma_k\hat{\sigma}_k)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, sta σ_k^{2n+1} in $\hat{\sigma}_k^{2n+1}$ rešitvi kvadratne enačbe $\mu^2 - L_{2n+1}(k)\mu - 1 = 0$. To pa pomeni, da je σ_k^{2n+1} kovinsko število reda $L_{2n+1}(k)$. Rezultat izrazimo še z verižnimi ulomki:

$$[k;\overline{k}]^{2n+1} = [L_{2n+1}(k);\overline{L_{2n+1}(k)}], \quad [k;\overline{k}]^{-(2n+1)} = [0;\overline{L_{2n+1}(k)}].$$

Lotimo se še potenc σ_k^{2n}. Za $k=1$ in $n=1$ je najenostavneje: $\sigma_1^2 = 1+\sigma_1 = [2;\overline{1}], \sigma_1^{-2} = [0;2,\overline{1}]$. Verižna ulomka imata periodo dolžine 1. V preostalih primerih pa imajo potence σ_k^{2n}, zapisane kot verižni ulomek, periodo dolžine 2. Kako pridemo do tega?

Za števili $\sigma_k^{2n}-1$ in $\hat{\sigma}_k^{2n}-1$ veljata enakosti $(\sigma_k^{2n}-1)+(\hat{\sigma}_k^{2n}-1) = L_{2n}(k)-2$ in $(\sigma_k^{2n}-1)(\hat{\sigma}_k^{2n}-1) = 2 - L_{2n}(k)$. To pomeni, da sta $\nu_k = \sigma_k^{2n}-1 > 0$ in $\hat{\nu}_k = \hat{\sigma}_k^{2n}-1$ rešitvi kvadratne enačbe $\nu^2 - (L_{2n}(k)-2)\nu - (L_{2n}(k)-2) = 0$. Označimo $K_{2n}(k) = L_{2n}(k) - 2$. Pri tem je vedno $K_{2n}(k) > 0$. Iz $\nu_k^2 - K_{2n}(k)\nu_k - K_{2n}(k) = 0$ dobimo

$$\begin{aligned}\nu_k &= K_{2n}(k) + \frac{K_{2n}(k)}{\nu_k} = K_{2n}(k) + \cfrac{1}{\cfrac{\nu_k}{K_{2n}(k)}} = K_{2n}(k) + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\nu_k}} \\ &= K_{2n}(k) + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{K_{2n}(k)+\cfrac{K_{2n}(k)}{\nu_k}}} = \cdots = [K_{2n}(k);\overline{1,K_{2n}(k)}].\end{aligned}$$

Vstavimo izraza za ν_k ter $K_{2n}(k)$ in dobimo

$$\sigma_k^{2n} = [L_{2n}(k)-1;\overline{1,L_{2n}(k)-2}], \quad \sigma_k^{-2n} = [0;L_{2n}(k)-1,\overline{1,L_{2n}(k)-2}].$$

Dobljena verižna ulomka imata periodo 2. Izjema nastopi takrat, ko je $L_{2n}(k) = 3$, kar pa je možno le v primeru $n=k=1$ (glej tabelo 1), kar pa smo že obravnavali.

$n \to$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n(1)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$L_n(1)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$F_n(2)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
$L_n(2)$	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238
$F_n(3)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481
$L_n(3)$	2	3	11	36	119	393	1298	4287	14159	46764	154451	510117
$F_n(4)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289
$L_n(4)$	2	4	18	76	322	1364	5778	24476	103682	439204	1860498	7881196

Tabela 1. Nekaj k-Fibonaccijevih in k-Lucasovih števil ($k = 1, 2, 3, 4$).

Ekvivalenčni razredi

V množico naravnih števil $\mathbb{N}$ lahko s kovinskimi razmerji uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$ in ustrezne ekvivalenčne razrede $[k]_\sim$. Naravni števili k in k' sta v relaciji $\sim$, kar zapišemo kot $k \sim k'$, natanko tedaj, ko obstajata taki racionalni števili α in β, da velja $\sigma_{k'} = \alpha + \beta\sigma_k$. Ker se σ_k in $\sigma_{k'}$ izražata s $\sqrt{k^2+4}$ oziroma $\sqrt{k'^2+4}$, lahko zapišemo tudi v ekvivalentni obliki: $k \sim k'$ velja natanko tedaj, ko je $\sqrt{(k'^2+4)/(k^2+4)}$ pozitivno racionalno število.

Relacija $\sim$ je očitno refleksivna ($k \sim k$), simetrična ($k \sim k' \Rightarrow k' \sim k$) in tranzitivna ($k \sim k' \wedge k' \sim k'' \Rightarrow k \sim k''$), torej ekvivalenčna relacija.

Primer. $1 \sim 4$, ker je $\sqrt{(4^2+4)/(1^2+4)} = \sqrt{20/5} = \sqrt{4} = 2$, $11 \sim 76$, ker je $\sqrt{(76^2+4)/(11^2+4)} = \sqrt{5780/125} = \sqrt{1156/25} = 34/5$, toda $11 \not\sim 14$, ker je $\sqrt{(14^2+4)/(11^2+4)} = \sqrt{200/125} = \sqrt{8/5}$, kar ni racionalno število.

Razrede $[k]_\sim$ vpeljemo za vsak $k \in \mathbb{N}$ kot običajno: $[k]_\sim = \{k' \in \mathbb{N} : k' \sim k\}$. Zlati, srebrni in bronasti razred so naravna zaporedja:

$$\begin{aligned}
[1]_\sim &= \{1, 4, 11, 29, 76, 199, \ldots\}, \\
[2]_\sim &= \{2, 14, 82, 478, 2786, \ldots\}, \\
[3]_\sim &= \{3, 36, 393, 4287, 46764, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Če je $k \sim k'$, potem je $[k]_\sim = [k']_\sim$, če pa $k \not\sim k'$, je $[k]_\sim \cap [k']_\sim = \emptyset$.

Če primerjamo števila v zlatem, srebrnem in bronastem razredu s tistimi v tabeli 1, opazimo v razredih 1-, 2- in 3-Lucasova števila z lihim indeksom: $L_{2n+1}(k)$. Res. Če je k najmanjše število v razredu, potem z enakostjo (10) dobimo:

$$\sqrt{\frac{L_{2n+1}^2(k)+4}{k^2+4}} = F_{2n+1}(k),$$

kar je celo naravno število. To pomeni, da je $k \sim L_{2n+1}(k)$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in $n \geq 0$.

Za konec

V ravnini kompleksnih števil so n-ti koreni enote rešitve enačbe $z^n = 1$. Zapišemo jih lahko kot $z_k = \exp(2k\pi i/n)$, kjer je $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Koreni z_k so oglišča pravilnega n-kotnika, ki je včrtan krožnici $|z| = 1$. Dolžina a_n stranice takega pravilnega n-kotnika je $a_n = |z_1 - z_0| = 2\sin(\pi/n)$, različne dolžine $d_{n,k}$ diagonal pa so $d_{n,k} = |z_k - z_0| = 2\sin(k\pi/n)$, kjer vzamemo $k = 2, 3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$. Diagonale in stranica so v razmerju

$$\frac{d_{n,k}}{a_n} = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.$$

Za $n = 4$ je to razmerje $\sqrt{2} = \sigma_2 - 1$, za $n = 5$ pa $(1+\sqrt{5})/2 = \sigma_1$. Za $n = 6$ dobimo $\sqrt{3}$ in 2, za $n = 8$ pa $\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{1+\sigma_2}, 1+\sqrt{2} = \sigma_2$ in $\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sigma_2}$. Vidimo, da je razmerje med diagonalo in stranico v pravilnem petkotniku zlato razmerje, v pravilnem osemkotniku je razmerje med srednje dolgo diagonalo in stranico srebrno razmerje. V [4] pa avtorica pokaže, da razmerje med diagonalo in stranico v nobenem pravilnem n-kotniku ni bronasto razmerje. Pač pa zavidanja vreden članek [1] uporablja bronasto razmerje v teoriji kvazikristalov. Pripomnimo, da je bil ta članek uvrščen na šesto mesto med desetimi najodličnejšimi raziskovalnimi dosežki Univerze v Ljubljani v letu 2017.

LITERATURA

[1] T. Dotera, S. Bekku in P. Ziherl, *Bronze-mean hexagonal quasicrystal*, Nature materials, 2017, DOI: 10.1038/NMAT4963.

[2] S. Falcon, *Relationships between some k-Fibonacci sequences*, Applied Mathematics **5** (2014), 2226–2234.

[3] M. Lakner, P. Petek in M. Škapin Rugelj, *Diskretni dinamični sistemi*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2015.

[4] A. Redondo Buitrago, *Polygons, diagonals, and the bronze mean*, Nexus network journal, **9** (2007), 321–326.

[5] V. W. de Spinadel, *From the golden mean to chaos*, Nueva Libreria, Buenos Aires 1998.

[6] H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, Van Nostrand, New York in drugje, 1948.

OPTIČNA PINCETA IN USTVARJANJE ULTRAKRATKIH OPTIČNIH SUNKOV VISOKIH INTENZITET, NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO 2018

NATAN OSTERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Institut »Jožef Stefan«

PACS: 01.75.+m, 42.55.f, 42.60.v, 42.62.b

Artur Ashkin, Gérard Mourou in Donna Strickland so dobitniki Nobelove nagrade za fiziko 2018 za svoje prelomne izume v fiziki laserjev. V prvi polovici članka je orisana zgodovinska pot do sodobne optične pincete, njeno delovanje in uporaba pri raziskavah, v drugi polovici pa opišemo metodo CPA (»chirped pulse amplication«) za ustvarjanje ultrakratkih optičnih sunkov visokih intenzitet ter navedemo uporabo in trenutne rekorde sodobnih sunkovnih laserskih sistemov.

OPTICAL TWEEZERS AND GENERATION OF HIGH-INTENSITY, ULTRA-SHORT OPTICAL PULSES, NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2018

Artur Ashkin, Gérard Mourou and Donna Strickland were awarded the 2018 Nobel Prize in Physics for their groundbreaking inventions in laser physics. A historical pathway to the modern optical tweezers, its operation and use in research are outlined in the first part of the article, whereas in the second part we describe the chirped pulse amplication technique for creation of high-intensity, ultra-short optical pulses, as well as the use and current records of modern pulsed laser systems.

Nobelovo nagrado za fiziko leta 2018 so prejeli trije eksperimentalni fiziki za svoje »prelomne izume v fiziki laserjev«. Arthur Ashkin je dobil polovico nagrade za iznajdbo optične pincete in njene uporabe v bioloških sistemih, drugo polovico pa sta si razdelila Gérard Mourou in Donna Strickland za izum metode za ustvarjanje ultrakratkih optičnih sunkov visokih intenzitet [10].

Ashkin je bil rojen leta 1922 v New Yorku, leta 1952 pa je doktoriral iz jedrske fizike na Univerzi Cornell. Po doktoratu se je zaposlil v Bell Laboratories, kjer je ostal vse do upokojitve leta 1992. Nobelovo nagrado je prejel pri starosti 96 let in s tem postal najstarejši prejemnik v zgodovini nagrade. Kot zanimivost naj omenimo, da je Ashkin že deveti prejemnik Nobelove nagrade iz Bell Labs.

Gérard Mourou, rojen 1944 v Albertvillu, Francija, je doktoriral leta 1973 na univerzi Paris VI. Po doktoratu je svojo raziskovalno pot najprej nadaljeval v Združenih državah Amerike, najprej na Univerzi Rochester, nato na Univerzi v Michiganu, leta 2004 pa se je vrnil v Francijo na ENSTA-Ecole Polytechnique v Parizu.

Donna Strickland, rojena 1959 v Guelphu, Kanada, je po diplomi iz inženirske fizike leta 1981 začela z doktoratom na Univerzi Rochester pod mentorstvom Mourouja. Še kot doktorska študentka je z mentorjem leta 1985 objavila svoj prvi znanstveni članek, za katerega je 33 let pozneje prejela Nobelovo nagrado. Po doktoratu leta 1989 je delala v Nacionalnem raziskovalnem svetu Kanade, v laboratoriju Lawrence Livermore, na univerzi Princeton, dokler se leta 1997 ni ustalila na Univerzi v Waterlooju v Kanadi.

Optična pinceta

Že v začetku 17. stoletja je astronom Kepler predlagal svetlobni tlak kot vzrok, da repi kometov vedno kažejo stran od Sonca. Svetlobni tlak je teoretično pokazal Maxwell leta 1873, v začetku 20. stoletja pa je bilo to eksperimentalno potrjeno. Pri tem je šlo za izjemo šibke tlake, saj virov svetlobe visoke intenzitete (tj. gostote energijskega toka) ni bilo na voljo. To je omogočil šele izum laserjev v 60. letih prejšnjega stoletja. Artur Ashkin je leta 1970 močno fokusiran laserski snop Gaussovega intenzitetnega profila usmeril na majhne dielektrične delce (npr. steklene mikrokroglice v zraku ali vodi) in opazil pričakovano pospeševanje delcev v smeri širjenja svetlobe zaradi t. i. *sipalne sile* oz. fotonskega tlaka [1]. Hkrati je ugotovil, da delce z lomnim količnikom, večjim od okolice, v prečni smeri glede na smer širjenja snopa t. i. *gradientna sila* vleče v smeri gradienta intenzitete, torej proti središču snopa. Da je delec lahko ujel na mestu, stran od sten eksperimentalne celice (žargonsko rečemo temu ujetje v 3 dimenzijah oz. 3D-ujetje), je moral zato uporabiti dva natančno poravnana laserska snopa, ki sta se širila v nasprotnih smereh. Sipalni sili obeh snopov sta se odšteli, gradientna sila pa je delec držala v gorišču snopov. Z enim samim laserskim snopom je bilo delce moč 3D ujeti samo s pomočjo gravitacije – če je bil primerno močan žarek usmerjen navpično navzgor, je gravitacija uravnotežila sipalno silo in delci so lahko optično levitirali.

Ashkin je področje raziskoval naprej in leta 1986 s sodelavci izdelal prvo enožarkovno optično past, s katero je v vodi lahko ujel dielektrične delce velikosti od nekaj deset nanometrov do nekaj deset mikrometrov [3]. S premikanjem lege gorišča snopa so lahko premikali tudi v past ujet delec, zato je naprava kmalu dobila ime optična pinceta. Pri njej se laserski snop tipično Gaussovega intenzitetnega profila močno fokusira skozi mikroskopski objektiv z veliko numerično aperturo ($\mathrm{NA} = n \sin\theta$, kjer je n lomni količnik okoliškega medija, θ pa kot pri vrhu stožca svetlobe, ki izhaja iz objektiva; tipična NA pri optični pinceti je okoli 1), zaradi česar na delec deluje močna gradientna sila, usmerjena proti gorišču snopa. Če je ta večja od sipalne sile, je delec stabilno ujet v 3D.

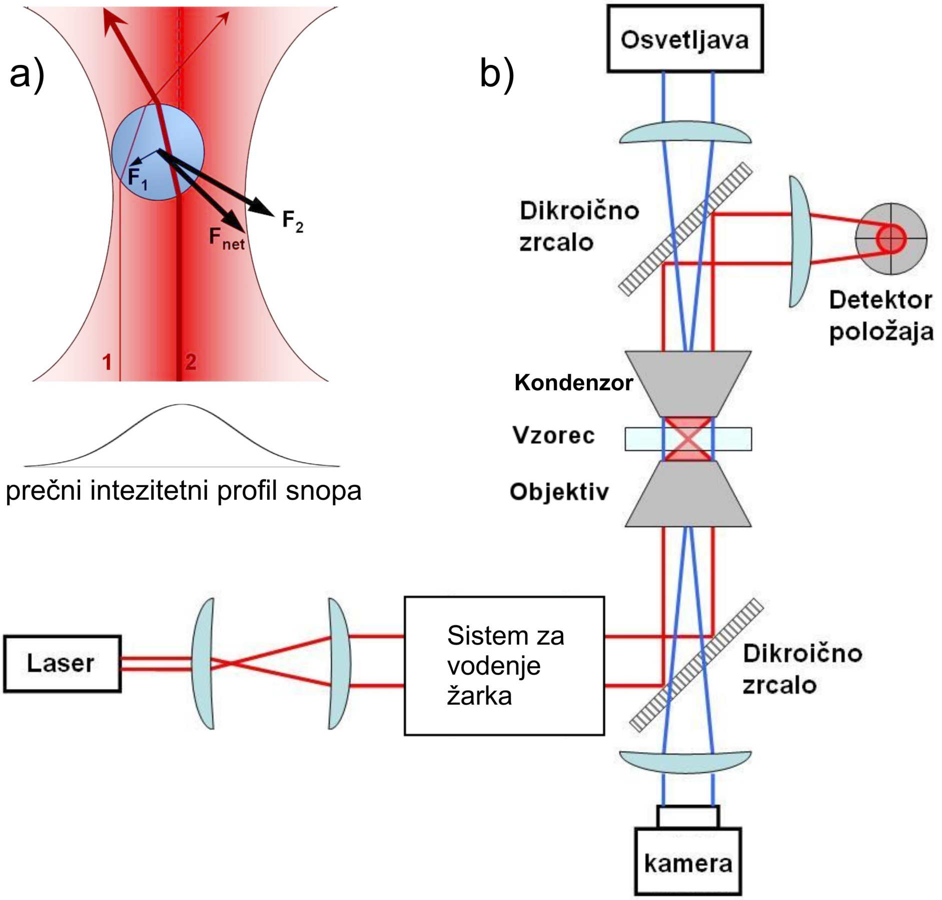
Poenostavljena shema optičnih sil na delec v optični pasti v približku geometrijske optike je prikazana na sliki 1a), kjer sta narisana dva žarka pri potovanju skozi dielektrično kroglico. Če se ta nahaja npr. levo od optične osi laserskega snopa, se centralni žarek z največjo intenziteto po dvojnem lomu odkloni v levo. Žarku se pri tem spremeni gibalna količina, zato na kroglico deluje sila v nasprotni smeri, torej proti optični osi.

Na splošno je gradientna sila posledica energije dielektrične snovi v električnem polju. Izračun sile je za poljubno velikost delca zahteven, če pa je delec znatno manjši od valovne dolžine laserske svetlobe (Rayleighov režim), ga lahko obravnavamo kot induciran električni dipol v električnem polju $\vec{E}$. Če zapišemo Lorentzovo silo $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ na dipol $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, pri čemer je α polarizabilnost delca, ki je odvisna od volumna delca ter lomnih količnikov delca in okolice, lahko z uporabo vektorske analize in ene izmed Maxwellovih enačb gradientno silo zapišemo kot $\vec{F} = \frac{1}{2}\alpha\nabla E^2$. Sila kaže v smeri gradienta intenzitete, torej proti gorišču laserskega snopa. Iz te enačbe je očitno, zakaj je za optično past potreben močno fokusiran žarek.

Uporaba optične pincete

Skupina pod vodstvom Stevena Chuja je optično pinceto uporabila za lovljenje in hlajenje atomov[1], Arthur Ashkin pa je hitro ugotovil, da je pinceta s svojo brezkontaktno naravo izjemno orodje za manipulacijo v bioloških sistemih. Za čim manjšo absorbcijo laserske svetlobe v vodi je začel uporabljati infrardeč laser in z njim najprej demonstriral lovljenje in manipulacijo

[1] Za te prelomne eksperimente, pri katerih je sodeloval tudi Ashkin, je del Nobelove nagrade za fiziko leta 1997 dobil samo Chu, kar je bilo za mnoge kontroverzno.



Slika 1. Optična pinceta. a) Princip delovanja v geometrijski optiki. Žarkom, ki vpadajo s spodnje strani, se po dvojnem lomu spremeni smer in s tem gibalna količina. Prikazana sta obosni žarek (1) in centralni žarek (2) z največjo intenziteto ter sili F_1 in F_2, ki delujeta na delec zaradi spremembe njunih smeri. Rezultanta sil F_{net} deluje proti gorišču snopa. b) Tipična eksperimentalna postavitev. Laserski snop se razširi, usmeri s sistemom za vodenje, nato pa z objektivom fokusira v ravnini vzorca, da nastane optična past. Lego delcev se določa s kamero ali s kvadrantno fotodiodo. Prirejeno po [9].

virusov in živih celic [2], nato pa pokazal tudi manipulacijo znotrajceličnih komponent.

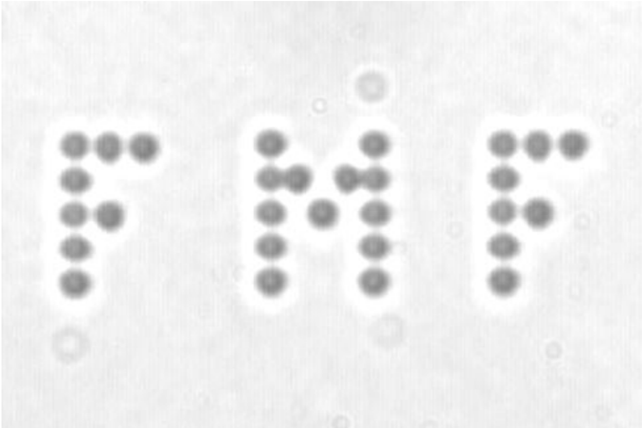
Na začetku devetdesetih let prejšnjega stoletja so v mnogih laboratorijih po svetu zgradili svoje optične pincete predvsem za raziskave bioloških sistemov. Pinceta namreč ne omogoča samo manipulacije, temveč tudi merjenje sil, ki delujejo na delec v optični pasti. Izkaže se, da je velikost gradientne sile kar sorazmerna z odmikom delca od središča pasti, torej velja Hookov zakon $\vec{F} = -k\vec{x}$. Lego delca $\vec{x}$ se določi s kamero ali kvadrantno fotodiodo, za kvantitativno določitev sile pa je treba poznati še trdoto »vzmeti« k, kar dosežemo s predhodno kalibracijo optične pasti. S pinceto je mogoče meriti sile v območju od 0,1 pN do nekaj 100 pN, kar je ravno območje, v katerem je mnogo relevantnih sil v mikrobiologiji in biokemiji.

Za merjenje sil na nivoju posameznih (bio-)molekul, je treba te najprej pritrditi na ustrezne »opore«. To so po navadi steklene ali polistirenske mikrokroglice, katerih površino se ustrezno kemijsko pripravi, da se nanje veže želen tip molekul. Ta tehnika je npr. omogočila raziskave molekulskih motorjev, molekul, ki pretvarjajo kemijsko energijo v mehansko delo in so ključne za vse aktivno premikanje živih organizmov, od subceličnega nivoja do premikanja celotnega organizma. Na kroglico je tako mogoče vezati molekulo kinezina, motornega proteina, ki vleče tovor znotraj evkariontskih celic. Če se tako kroglico z optično pinceto prestavi do mikrotubula (znotrajcelični polimer, ki je neke vrste celična »cesta«), se kinezin pripne na mikrotubul in začne korakati, kar lahko opazimo kot diskretno premikanje kroglice. S pinceto je moč vleči kroglico tudi v nasprotno smer in tako ugotoviti, s kolikšno silo lahko omenjeni motorni protein vleče tovor.

Danes se optična pinceta uporablja predvsem za proučevanje posameznih biomolekul (npr. določanje odvisnosti sila-razteg pri DNK, RNK, polimerih pod različnimi pogoji), študije biomolekulskih procesov (npr. meritev adhezije med dvema bakterijama; opazovanje korakanja polimeraze RNK, ki v procesu transkripcije kopira DNK v mRNK), mikroreologijo – merjenje mehanskih lastnosti mehkih snovi na mikronivoju, daleč najpogostejša uporaba pincete pa je natančna manipulacija in razvrščanje mikroobjektov.

Eksperimentalna postavitev

Shema tipične eksperimentalne postavitve optične pincete je prikazana na sliki 1b). Laserski snop se najprej razširi, nato pa se mu s sistemom za vodenje žarka spremeni smer. Preko dikroičnega zrcala, ki odbije lasersko, prepusti pa vidno svetlobo, se ga usmeri na objektiv. Ta snop sfokusira, kar v ravnini vzorca generira optično past, v katero se ujame delec, ki ima lomni količnik večji od okolice. Prepuščena laserska svetloba, ki jo zbere



Slika 2. Mikroskopska slika množice mikrometrskih polistirenskih kroglic v vodi, ki so ujete v optičnih pasteh [8].

kondenzorska leča, preko dikroičnega zrcala potuje na detektor položaja, tipično je to kvadrantna fotodioda (QPD). Ker ujet delec deluje kot mala leča, njegovi premiki zunaj gorišča laserskega snopa spreminjajo razmerja svetlobe na segmentih QPD, iz česar je mogoče dobiti relativno lego delca glede na center optične pasti in iz tega izračunati silo na delec. Za mikroskopijo vzorca je potrebno opisanim elementom dodati samo še osvetlitev in kamero.

Mnogo eksperimentov zahteva uporabo več hkratnih optičnih pasti, kar se doseže z deljenjem laserskega snopa. Pri holografski optični pinceti računalniško ustvarjen hologram na prostorskemu modulatorju svetlobe (angl. spatial light modulator) vhodni snop razdeli v več snopov, ki imajo gorišča v poljubnih točkah, ki niso omejene na eno samo ravnino (tako je npr. mogoče ujeti mikrodelce v oglišča navidezne kocke). Druga vrsta deljenja snopa pa je časovno deljenje, pri katerem je snop za kratek čas usmerjen v prvo točko, nato v drugo, tretjo ... potem pa se zaporedje ponovi. Če je trajanje celotnega zaporedja kratko v primerjavi z difuzijskim časom ujetih delcev, nastane več kvazistatičnih optičnih pasti. Snop je mogoče usmerjati z ogledali (galvoskenerji), kar je počasna in nenatančna varianta, ali pa z akusto-optičnimi deflektorji (AOD), ki omogočajo preklapljanje lege gorišča žarka s frekvenco reda 100 kHz in subnanometrsko natančnostjo. Na sliki 2 je prikazan rezultat takšne mikromanipulacije delcev: množica polistirenskih kroglic v vodi, od katerih je vsaka ujeta v svojo optično past. V trenutku, ko pasti izklopimo, kroglice prosto difundirajo po tekočini, zato napis v nekaj sekundah izgine. Video posnetek si lahko ogledate na strani [8].

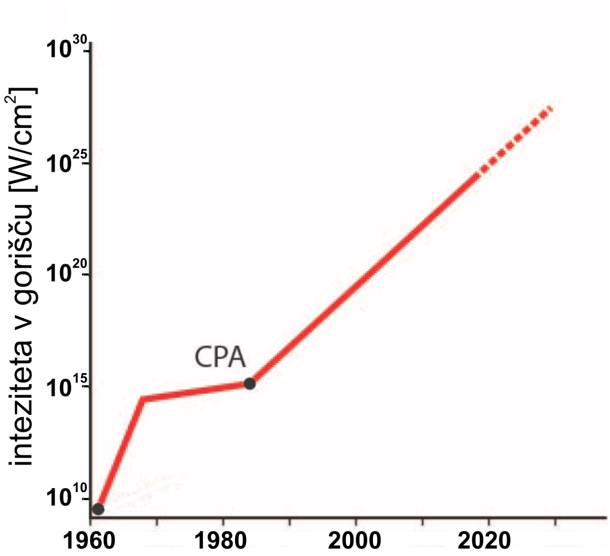
Optična pinceta v Sloveniji

V devetdesetih letih prejšnjega stoletja je bila optična pinceta še precej eksotičen znanstveni instrument, zato si je vsaka raziskovalna skupina morala pinceto zgraditi sama, kar je bilo časovno precej potratno. Okoli leta 2000 so se posledično na trgu pojavile prve komercialne pincete za resno uporabo. Približno ob istem času sta na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani raziskovalca dr. Igor Poberaj in dr. Dušan Babič dobila idejo, prostor in potrebna denarna sredstva za postavitev prve optične pincete v tem delu Evrope. Leta 2003 je njuna pinceta, ki se je raztezala na 3 m^2 optične mize in bila sestavljena iz IR-laserja (Nd-YAG, λ=1064 nm, P=2 W), sistema za vodenje in časovno deljenje snopa z AOD ter Zeissovega invertnega optičnega mikroskopa, prvič ujela mikrometrske steklene kroglice v vodi. Obiskovalci laboratorija so bili navdušeni nad delovanjem pincete, prav poseben interes pa so kazali za sistem za vodenje, zato sta leta 2004 omenjena raziskovalca ustanovila podjetje Aresis, d. o. o. in takoj uspešno prodala tak sistem. Kmalu so se pojavile tudi želje po izvedbi celotne optične pincete po sistemu »na ključ«, zato je podjetje razvilo tudi to in po desetletju in pol razvoja Aresis trenutno proizvaja in trži ene izmed najboljših optičnih pincet na svetu.

Zaradi omenjenih okoliščin imamo v Sloveniji kar nekaj optičnih pincet, ki jih uspešno uporabljamo. Dve pinceti sta v Laboratoriju za eksperimentalno fiziko mehke snovi na FMF, tri pincete na Odseku za fiziko trdne snovi Instituta Jožef Stefan in dve pinceti na Inštitutu za biofiziko Medicinske fakultete UL.

Metoda za ustvarjanje ultrakratkih laserskih sunkov visokih intenzitet

Theodore Maiman je leta 1960 demonstriral prvi laser. To je bil rubinski laser, ki je ob vsakem blisku črpalne bliskavice oddal približno milisekundo



Slika 3. Povečevanje intenzitete laserskih sunkov skozi čas.

trajajoč sunek rdeče svetlobe z valovno dolžino 694,3 nm. Od te točke je razvoj laserjev potekal v dveh smereh. Na eni strani je bila prisotna želja po frekvenčno ostrem kontinuiranem izvoru svetlobe, ki je potreben pri raznovrstnih meritvah (metrologija, spektroskopija), na drugem pa po kratkih in močnih laserskih sunkih. Slednje sta omogočili iznajdbi preklopa kvalitete laserskega resonatorja (angl. Q-switching) [6] in uklepanja faz (angl. Mode-locking) [5, 4].

V prvem desetletju laserja je energija sunka iz fazno uklenjenega laserskega oscilatorja z začetne vrednosti 1 nJ z razvojem laserskih ojačevalnikov narasla za pet velikostnih redov (slika 3), hiter razvoj pa se je po letu 1970 občutno upočasnil. Kratki sunki z že relativno nizko energijo imajo velike vršne intenzitete[2], kar poškoduje material ojačevalnika in druge optične komponente. Do poškodb pride zlasti zaradi nelinearnih procesov v

[2]Intenziteta oz. gostota svetlobnega toka $j = \frac{1}{2}nc_0\epsilon_0|E_0|^2$ je sorazmerna kvadratu amplitude jakosti električnega polja E_0, hitrosti svetlobe v vakuumu c_0, lomnemu količniku medija n in dielektrični konstanti ϵ_0. Intenziteti svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju $j = 1$ kW/m^2 v praznem prostoru tako ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868$ V/m, laserju moči 1 W, sfokusiranemu na površino 1 μm^2, ustreza jakost $E_0 = 2{,}7 \cdot 10^6$ V/m.

snovi, npr. samofokusiranja snopa zaradi Kerrovega pojava pri intenzitetah svetlobe okoli GW/cm^2.

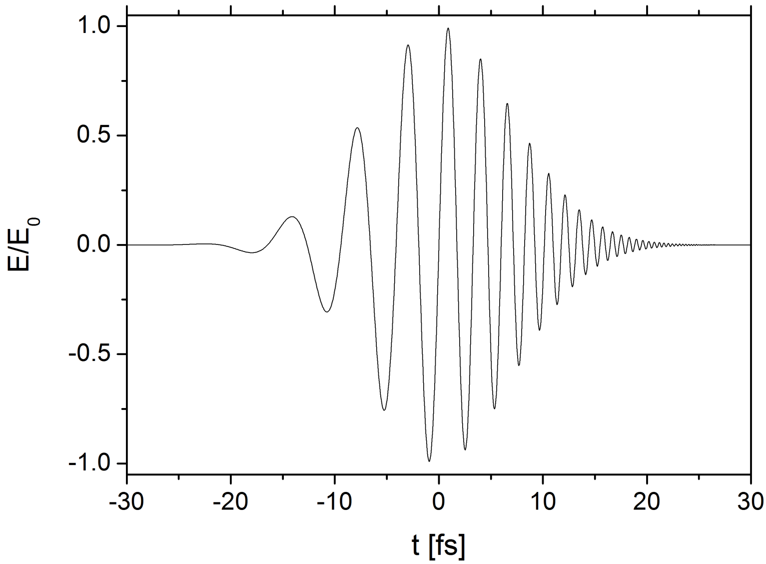
Visokoenergijske sunke z intenziteto pod pragom poškodb so v sedemdesetih in osemdesetih letih prejšnjega stoletja lahko dosegli le s povečevanjem premera laserskega snopa. Za to so bili potrebni veliki ojačevalniki, kar je laserske sisteme naredilo ogromne, drage in so zaradi počasnega ohlajanja ojačevalnikov omogočali zelo nizko frekvenco ponavljanja sunkov. Kot ekstremen primer lahko omenimo laboratorij Lawrence Livermore (Kalifornija, ZDA), kjer so na koncu sedemdesetih let prejšnjega stoletja začeli graditi laser Nova. Sestavljalo ga je deset 180 m dolgih žarkovnih linij s premerom ojačevalnikov približno pol metra in je nekajkrat na dan lahko ustvaril sunek dolžine 2 ns z energijo 100 kJ.

Tehnika CPA

Nov zagon razvoju kratkih laserskih sunkov visokih intenzitet sta leta 1985 omogočila Donna Strickland in Gérard Mourou z uporabo tehnike CPA (angl. chirped pulse amplification). Inspiracijo sta dobila iz radarske tehnologije, kjer so CPA uporabljali že od šestdesetih let. Zamisel je preprosta in elegantna: ultrakratek sunek se najprej razširi v času za nekaj velikostnih redov, s čimer se ustrezno zmanjša vršna intenziteta. Sunek se nato ojača, v zadnji fazi pa se sunek stisne nazaj na začetno dolžino, kar posledično prinese zelo veliko intenziteto.

Raziskovalca sta 150 ps trajajoč laserski sunek z energijo reda nJ iz fazno uklenjenega Nd:YAG laserja poslala po 1,4 km dolgem optičnem vlaknu. Zaradi normalne disperzije v vlaknu se je nizkofrekvenčni (rdeči) del sunka širil hitreje od visokofrekvenčnega (modrega) dela. Na izhodu iz vlakna sta posledično dobila 300 ps dolg čivk (angl. chirp), sunek, pri katerem se je – tako kot pri čivkanju ptičev – frekvenca spreminjala s časom (slika 4). V drugem koraku sta čivk ojačila v regenerativnem ojačevalniku Nd:steklo, da sta dosegla energijo 1 mJ, nato pa ga s kompresorjem z dvojno mrežico časovno stisnila na 2 ps.

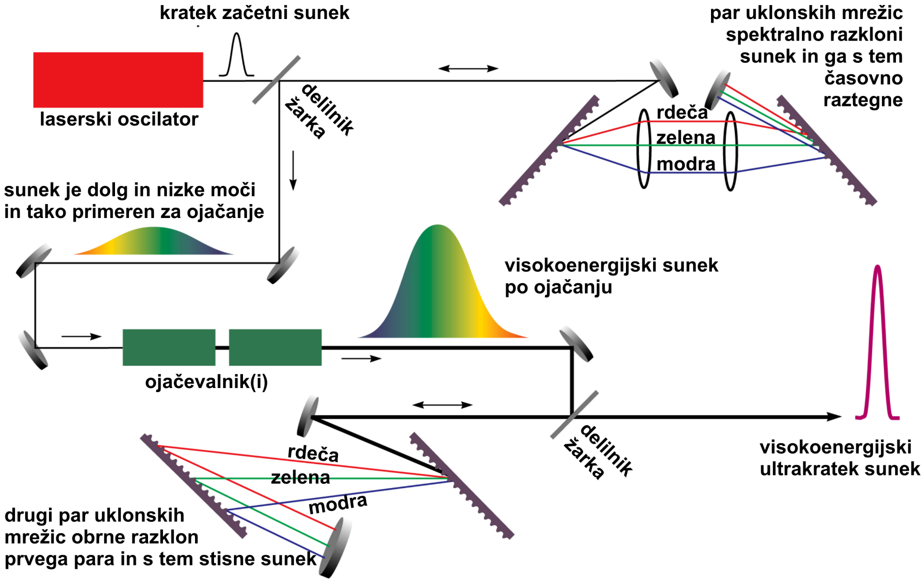
Dolgo optično vlakno za transformacijo kratkega sunka v dolg čivk ni zelo praktično, zato ga je kmalu nadomestil par uklonskih mrežic. Z njim so leta 1987 demonstrirali razteg sunka trajanja 85 fs na 85 ps in skrčitev



Slika 4. Časovna odvisnost relativne jakosti električnega polja pri 20 fs dolgem čivku.

nazaj na začetno dolžino [7] ter pri tem poudarili, da bo to v prihodnosti omogočilo laserske moči v območju petawattov. Takšna – danes standardna – konfiguracija CPA je prikazana na sliki 5. Ultrakratek sunek iz laserskega oscilatorja preko polarizacijskega delilnika žarka najprej potuje na prvi par uklonskih mrežic, ki sta postavljeni v obliki črke Λ. Na prvi mrežici se žarek razkloni, optika ga usmeri na drugo mrežico, ki deluje ravno obratno – različno usmerjene frekvenčne komponente spet skombinira v en žarek. Ta se v zrcalu odbije naravnost nazaj, tako da se proces razklona in kombinacije še enkrat ponovi. Pri potovanju sunka skozi tako postavljen par mrežic prepotuje rdeča svetloba manjšo pot od modre svetlobe, kar glede na to, da je hitrost širjenja svetlobe po praznem prostoru neodvisna od valovne dolžine, pomeni, da nizkofrekvenčne komponente (rdeči del spektra) v času prehitijo visokofrekvenčne komponente (modri del spektra). Rezultat je čivk, po času trajanja τ_c lahko do 10.000-krat daljši od vhodnega svetlobnega sunka.

Polarizacijski delilnik žarka čivk odbije in ga usmeri skozi enega ali več ojačevalnikov (Ti:safir, Nd:steklo ali optično parametrično ojačevanje v nelinearnem kristalu), pri čemer se mu energija poveča, a seveda tako,



Slika 5. Ustvarjanje ultrakratkih visokoenergijskih sunkov z metodo CPA.

da njegova vršna intenziteta j_c ostane pod pragom poškodbe ojačevalnikov. Ojačan čivk je na koncu pod kotom usmerjen na drugi par uklonskih mrežic, ki sta tokrat postavljeni vzporedno. Žarek se na prvi mrežici razkloni, druga mrežica pa komponente z različnimi frekvenčnimi komponentami usmeri tako, da padajo pravokotno na ogledalo. Posledično posamezne komponente potujejo nazaj po natanko istih poteh in se zato na prvi mrežici skombinirajo nazaj v en žarek. Pri opisanem procesu prepotujejo dolgovalovne komponente daljšo pot od kratkovalovnih, kar pomeni, da bi modri del spektra rdečega prehiteval v času, če bi na ta par mrežic prišel sunek, ki bi imel vse komponente sočasne. Pri tehniki CPA pa imamo opravka s čivkom, v katerem rdeči del spektra prehiteva modrega, zato se lahko z ustrezno nastavitvijo mrežic to prehitevanje kompenzira, tako da so vse komponente spet sočasne. Rezultat je ultrakratek sunek dolžine τ_p z vršno intenziteto $j_p = j_c \tau_c / \tau_p$.

Uporaba kratkih laserskih sunkov visokih intenzitet

Tehnika CPA je omogočila gradnjo kompaktnih laserskih sistemov z ultrakratkimi sunki velikih moči. Danes je moč direktno ustvarjati laserske sunke dolžine nekaj fs, kar je tako kratek čas, da v njem električno polje le nekajkrat zaniha. Kar se tiče moči, so bili sunki moči 1 PW prvič doseženi leta 1999, danes pa je na svetu že več kot 50 laserjev take moči. Trenutni rekord je 1 ps trajajoč sunek energije 2 kJ, torej moči 2 PW. Pri Pragi v okviru evropskega projekta Extreme Light Infrastructure gradijo laser 4 Aton z energijo sunkov 2 kJ in dolžino pod 150 fs, kar pomeni, da bo moč sunkov 10 PW. Laser bo lahko »ustrelil« en sunek na minuto. Načrtovana vršna intenziteta fokusiranega sunka reda velikosti 10^{23} W/cm^2 ustreza jakosti električnega polja 10^{14} V/m – za primerjavo, to je kar 200-krat več od električnega polja v vodikovem atomu pri Bohrovem radiju. Če je jakost električnega polja svetlobe primerljiva z jakostjo polja, ki v atomu veže elektrone, nastopi t. i. režim »močnega polja« atomske fizike. V tem režimu lahko atom ionizira s hkratno absorbcijo več fotonov, zato izbiti elektron odleti z ogromno kinetično energijo.

Sistemi na osnovi laserjev s CPA se uporabljajo tudi za ustvarjanje višjih harmonikov. Na ta način lahko ustvarimo sunke, krajše od 1 fs, kar omogoča raziskave dinamike elektronov znotraj atomov in molekul, ki poteka na attosekundni časovni skali. Laserska svetloba zelo visoke intenzitete lahko ustvari plazemski val za pospeševanje elektronov do velikih energij na kratkih razdaljah. V laboratoriju Lawrence Berkeley (ZDA) so s sunkom moči 0,3 PW pospešili elektrone do energije 4,2 GeV na razdalji 9 cm. V klasičnih linearnih pospeševalnikih, v katerih elektrone pospešuje radiofrekvenčno valovanje, je tipično povečanje energije 15 MeV/m, torej bi za 4,2 GeV potrebovali 280 m dolg pospeševalnik!

Laserji z visokointenzitetnimi ultrakratkimi sunki so razširjeni tudi v industriji in medicini, najpogostejša uporaba pa je za natančno ablacijo materiala. Zaradi kratkega trajanja sunka je segrevanje materiala minimizirano, zato je okolica interakcijskega volumna praktično nepoškodovana. Za primer, vrtanje 10 μm luknje z 1 ps sunki v tanko plast zlata naredi stene luknje neravne na velikostni skali pod 100 nm. Če za isti namen uporabimo

100 ps sunke, so stene luknje neravne na mikrometrski skali, saj se med obdelavo okoliška kovina stali, tvori kapljice, nato pa se spet strdi.

V medicini so femtosekundni laserji zaradi brezkontaktne narave in nedestruktivnosti okoliškega tkiva vedno bolj prisotni pri operacijah kratkovidnosti, dolgovidnosti ali astigmatizma očesne leče. Namesto s skalpelom pri metodi LASIK operater naredi režo v roženico z računalniško vodenim femtosekundnim laserjem, nato pa skozi nastalo odprtino z excimernim laserjem s fotoablacijo preoblikuje površino sredice roženice in tako spremeni njeno zakrivljenost ter s tem dioptrijo očesa. Zadnji dosežek na področju laserske operacije kratkovidnosti je metoda SMILE, pri kateri je uporabljen samo en femtosekundni laser. Ta v tkivo roženice vreže tanek okrogel disk primerne oblike ter v roženico napravi 4 mm dolgo režico, skozi katero operater disk potegne ven. S tem je dioptrija odpravljena, okrevanje pa še hitrejše kot pri operaciji LASIK.

LITERATURA

[1] A. Ashkin, *Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure*, Physical Review Letters **24** (1970), 156–159.

[2] A. Ashkin in J. M. Dziedzic, *Optical Trapping and Manipulation of Viruses and Bacteria* Science **235** (1987), 1517–1520.

[3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm in S. Chu, *Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles*, Optics Letters **11** (1986), 288–290.

[4] M. DiDomenico, *Small-Signal Analysis of Internal (Coupling-Type) Modulation of Lasers*, Journal of Applied Physics **35** (1964), 2870–2876.

[5] L. E. Hargrove, R. L. Fork in M. A. Pollack, *Locking of He–Ne laser modes induced by synchronous intracavity modulation*, Applied Physics Letters **5** (1964), 4–5.

[6] F. J. McClung in R. W. Hellwarth, *Giant Optical Pulsations from Ruby*, Journal of Applied Physics **33** (1962), 828–829.

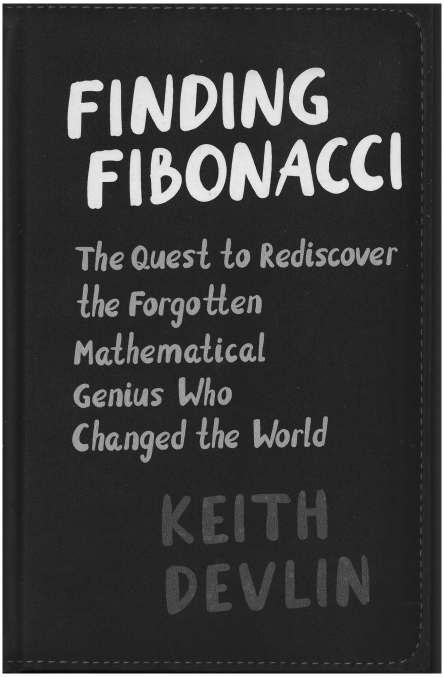
[7] M. Pessot, P. Maine in G. Mourou, *1000 Times Expansion/Compression of Optical Pulses for Chirped Pulse Amplification*, Optics Communications **62** (1987), 419–421.

[8] *Laboratorij za eksperimentalno fiziko mehke snovi*, dostopno na `tweezers.fmf.uni-lj.si/opticna-pinceta/`, ogled 21. 12. 2018.

[9] *Optična pinceta*, dostopno na: `sl.wikipedia.org/wiki/Opticna_pinceta`, ogled 21. 12. 2018.

[10] *The Nobel Prize in Physics 2018*, dostopno na `www.nobelprize.org/prizes/physics/2018/`, ogled 21. 12. 2018.

Keith Devlin, Finding Fibonacci – The Quest to Rediscover the Forgotten Mathematical Genius Who Changed the World, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2017, 254 strani.



Keith Devlin, rojen leta 1947 v Angliji, profesor na ameriški univerzi Stanford, je objavil že drugo knjigo, v kateri na izviren način obravnava italijanskega matematika Leonarda iz Pise, ki nam je bolj znan kot Fibonacci. Leta 2011 je Devlin o njem objavil prvo knjigo z naslovom *The Man of Numbers*, ki je bila predstavljena v 3. številki Obzornika za matematiko in fiziko leta 2015.

Devlin ima nesporno Leonarda Fibonaccija za največjega evropskega srednjeveškega matematika, ki je s svojimi deli, zlasti pa z *Liber abbaci*, povzročil v Evropi na področju računstva in matematike pravo revolucijo. Fibonacci je knjigo *Liber abbaci*, knjigo o računanju, prvič objavil leta 1202, nato pa v nekoliko spremenjeni obliki še leta 1228. Pisana je v latinščini, tako da je bila razumljiva širšemu krogu šolanih ljudi v Italiji in drugje po Evropi. Ker takrat še ni bilo tiska, so knjigo ročno prepisovali, običajno menihi po samostanih.

O Leonardovem življenju vemo bore malo. Rodil se je okoli leta 1170, verjetno v Pisi, tamkajšnjemu trgovcu, ki je svoje posle opravljal po nekaterih pristaniških mestih ob Sredozemskem morju. Pogosto je še rosno mladega sina jemal s seboj na potovanja. Indijsko-arabske številke in računanje z njimi se je Leonardo hitro naučil od Arabcev, s katerimi sta z očetom pogosto trgovala. Računanje in geometrijo pa je Leonardo kmalu tako dobro obvladal, da je poleg *Liber abbaci* napisal še *Liber quadratorum*, *Practica geometriae*, *Flos* in *Liber minoris guise*, ki je bila namenjena predvsem trgovcem. Latinska beseda *flos* pomeni *cvet*, *liber minoris guise* pa dobesedno *knjiga na manjši način*. Leonardo je umrl okoli leta 1250, najbrž v Pisi.

Knjiga *Liber abbaci* je pomembna za evropsko civilizacijo, ker uvaja indijsko-arabske številke, mestni desetiški zapis števil in računanje z njimi. Obravnava tudi prave in neprave ulomke, kriterije deljivosti, preizkuse pravilnosti računov in drugo. Do takrat so namreč števila zapisovali z nerodnimi rimskimi številkami, računali pa s preprostimi pomagali, tudi s prsti. Indijsko-arabske številke so sicer poznali redki Evropejci že prej, toda Fibonacci je s svojo *Liber abbaci* naredil ogromen korak naprej v razvoju evropske in svetovne matematike.

Liber abbaci pa ne uvaja le indijsko-arabskih števil, ampak vsebuje številne konkretne naloge in postopke za njihovo reševanje. Veliko nalog je posvečenih trgovanju, menjavi, investicijam, zlitinam za kovanje denarja, reševanju raznih matematičnih problemov in enačb, računanju kvadratnih in kubičnih korenov in nalogam, ki bi jih dandanes uvrstili v rekreacijsko matematiko. V tem delu je tudi znani problem o razmnoževanju kuncev, kar je povezano z znamenitimi *Fibonaccijevimi števili*.

Liber abbaci so prepisovali in prilagajali lokalnim posebnostim, kot so narečje, denar, mere in uteži. Včasih so v prepisih tudi pozabili omeniti avtorja, na katerega se je z leti pozabilo. Znanje, ki je zajeto v tej knjigi, pa se je hitro razširilo. Na Leonarda se je spet z velikim spoštovanjem spomnil Luca Pacioli (1445–1517). Šele v 19. stoletju se je pojavilo ime *Fibonacci* in prav tako pojem *Fibonaccijeva števila*. Prevod *Liber abbaci* v angleščino je bil objavljen šele leta 2002. To je prvi prevod v neki živi svetovni jezik. Na ta prevod, ki ima tudi za ljubitelje TEXa zanimivo zgodovino in je doživel in preživel hudo preizkušnjo, je Devlin nestrpno čakal in mu v knjigi odmeril precej prostora.

Devlinu je Fibonacci s svojimi deli zares prirasel k srcu. Za nalogo si je zastavil, da v Italiji poišče čim več stvari, ki so povezane z njim. Zato je izkoristil več službenih in zasebnih obiskov v Italiji, da jih poišče. Najbolj je bil vesel, da mu je uspelo v knjižnicah v Sieni in Firencah najti v celoti ohranjene prepise *Liber abbaci*, ki jih sicer ni prav veliko ali pa niso popolni. Natančno opisuje osebne občutke, ko v rokah drži veliko dragocenost. Zadovoljen pa je bil tudi, da je našel v Pisi Fibonaccijev spomenik, ulični napis in neko spominsko ploščo z njegovim imenom. Vsakemu ponovnemu odkritju nameni precej besed.

Devlin opisuje svoje iskanje Fibonaccijevih sledi po Toskani na prav privlačen in edinstven, včasih tudi hudomušen in dramatičen način. To se pač dogaja v turističnih krajih, kjer se tare turistov iz vsega sveta, in nekoga, ki ima popolnoma druge interese, malo čudno gledajo. Toda Devlinova vztrajnost, izkušnje in dragocena poznanstva so mu le omogočila, da je lahko na koncu zmagoslavno vzel v roke in prelistal srednjeveške rokopise, prepise Fibonaccijevega temeljnega dela. Zato je opisana knjiga prijetno branje, pri katerem ni treba znati veliko matematike. Rečemo lahko, da je knjiga mešanica zgodovine, matematike in osebnih doživetij.

Devlin ima objavo *Liber abbaci* za velik mejnik v razvoju evropske in svetovne matematike, podobno kot vzpon računalništva v drugi polovici 20. stoletja. Oboje je zelo spremenilo svet. Danes si ne moremo več predstavljati, kakšno bi bilo življenje brez desetiških števil in računanja z njimi, kaj šele brez informacijsko komunikacijske tehnologije.

Devlin tudi ne pozabi omeniti Indije, kjer so že veliko pred Fibonaccijem poznali desetiški mestni zapis števil in računanje z njimi. Pa tudi ne perzijskih in arabskih matematikov, ki so vse to znanje prenesli na območje Sredozemlja.

Devlinova nova knjiga je razdeljena na predgovor, 16 poglavij in dodatek, v katerem je na kratko predstavljena vsebina vseh poglavij Fibonaccijeve knjige *Liber abbaci*. Konča pa se z bibliografijo in indeksom.

Marko Razpet

VESTI

Bojan Mohar je prejel prestižno nagrado Kanadskega kraljevega združenja

Profesor dr. Bojan Mohar je prejel priznanje *John L. Synge Award* za leto 2018. Podeljuje ga *Royal Society of Canada*, tj. Kanadsko kraljevo združenje, ki je podobna ustanova kot naša Akademija znanosti in umetnosti. Združuje in nagrajuje raziskovalce in umetnike, ki so dali pomembne prispevke Kanadi. Nagrado, ki se imenuje po matematiku J. L. Syngeu, dajejo za izredne raziskovalne dosežke na kateremkoli področju matematike. V zadnjih treh desetletjih jo je dobilo osem matematikov.

Kratka obrazložitev pravi: »Profesor Bojan Mohar na Univerzi Simon Fraser od leta 2005 zaseda prestižno katedro *Canada*

Research Chair. Je med vodilnimi v svetu na področju Teorije grafov. Znan je po svojih rešitvah odprtih problemov in domnev. V večini njegovih del je vidna kombinacija kombinatorike, geometrije, topologije in algebre. Njegovi globoki rezultati v topološki in strukturni teoriji grafov so trajno vplivali ne samo na topološko teorijo grafov, temveč tudi na teoretično računalništvo in druga področja.«

Mohar je objavil sam ali s sodelavci več kot 310 znanstvenih člankov. V tisku ali sprejetih pa ima še več kot 30 člankov. Skupaj z danskim matematikom Carstenom Thomassenom je avtor pomembne monografije *Graphs on surfaces*. Leta 1996 je bil izvoljen za člana *Društva za industrijsko in uporabno matematiko (SIAM)*. To društvo ga je v letu 2018 skupaj s 27 drugimi znanstveniki z vsega sveta odlikovalo s prestižnim naslovom *Siam Fellow*. Je tudi redni član *Inženirske akademije Slovenije*. Bojan Mohar je leta 1990 prejel Kidričevo nagrado, leta 2009 pa je postal ambasador Republike Slovenije v znanosti. Leta 2016 je dobil Eulerjevo medaljo za leto 2010 (ni napaka!). Medaljo podeljujejo za izredne dosežke v kombinatoriki.

Mohar vsako leto za več mesecev pride v Slovenijo. Tu dela v programski skupini Teorija grafov v okviru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) in na Fakulteti za matematiko in fiziko (FMF) Univerze v Ljubljani.

Mohar je eden od dveh glavnih urednikov ugledne revije *Journal of Combinatorial Theory Series B*. Je tudi glavni urednik za področje Teorije grafov pri reviji *Electronic Journal of Combinatorics*.

Zanimiv intervju, ki ga je 3. oktobra 2018 Bojan Mohar imel na Radiu Slovenija, lahko poslušate na [1].

Mimogrede, kot še eno ilustracijo uspešnosti Kanade pri privabljanju talentov z našega konca omenimo, da je v letu 2018 Kanadsko kraljevo združenje odločilo, da nagrado *Rutherford Memorial Medal in Chemistry* dobi Tomislav Friščić, ki je diplomiral 2001 v Zagrebu in je zdaj profesor na Univerzi McGill.

LITERATURA

[1] M. Delač, Prof. dr. Bojan Mohar, Slovenski matematik je prejel prestižno nagrado Kanadskega kraljevega združenja, Radio Prvi, 3. 10. 2018, dostopno na `radioprvi.rtvslo.si/2018/09/intervju-158/`, ogled 21. 12. 2018.

Peter Legiša

STROKOVNO SREČANJE IN 71. OBČNI ZBOR DMFA

Tokratno srečanje DMFA Slovenije je potekalo v Dobrni in se je prepletalo z 11. konferenco fizikov v osnovnih raziskavah. Za društveni del srečanja in dogovore z organizatorjem konference fizikov v osnovnih raziskavah, Mihom Škarabotom, je skrbel Jurij Bajc. Poleg predavanj na konferenci so si udeleženci lahko ogledali tudi številne plakate in se ob njih pogovorili z njihovimi avtorji.

Letošnji vabljeni predavatelj je bil dr. Gorazd Planinšič. Predstavljena tema z naslovom *Kako naj uporabljamo fizikalne poskuse, da bodo pomagali študentom pri konstruiranju lastnega znanja,* je vzbudila med poslušalci veliko zanimanje.

71. občni zbor DMFA

Občnega zbora, ki se je začel ob 17.30 v hotelu Vita v Dobrni, se je udeležilo 80 članov DMFA Slovenije (od tega 12 članov upravnega odbora DMFA in 4 častni člani).

1. Otvoritev
2. Izvolitev delovnega predsedstva
3. Društvena priznanja
4. Poročila o delu društva
5. Razprava o poročilih
6. Vprašanja in pobude
7. Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2017
8. Razrešitve in volitve
9. Razno

Ad 1. Ker je ob 17.30 prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, začne občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije z delom ob 18.00. Med čakanjem Mitja Rosina obudi spomin na življenje in delo fizika Ivana Kuščerja ob stoletnici njegovega rojstva.

Ad 2. V delovno predsedstvo so izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Sandra Cigula in Marko Razpet, zapisnikar Janez Krušič. Overovatelja zapisnika sta Maja Remškar in Matjaž Željko.

Delovni predsednik najprej pozdravi udeležence občnega zbora.

Z minuto molka se občni zbor pokloni spominu na v zadnjem letu preminule člane: Olgo Arnuš, Oskarja Jericija, Andreja Kuzmana, Cvetko Lipoglavšek, Stanislava Pirnata, Silva Žlebirja.

Ad 3. Društveno priznanje prejmejo:

- **Andreja Grom**, učiteljica matematike in fizike na OŠ Otočec, upokojena 2013,
- **Andrej Guštin**, učitelj fizike na Elektrotehniško-računalniški srednji šoli in gimnaziji Ljubljana ter
- **Marta Zabret**, učiteljica matematike na Gimnaziji in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik.

Vse utemeljitve prebere Boštjan Kuzman.

Ad 4. Poročila o delu društva so objavljena v biltenu 71. občnega zbora, ki je objavljen na domači strani DMFA: `www.dmfa.si/ODrustvu/Dokumenti/OZ2018-bilten.pdf`. (Udeleženci občnega zbora so ga dobili tudi v tiskani obliki.)
Dodatnih poročil ni.

Ad 5. Poročila so sprejeta brez dodatnih razprav.

Ad 6. Klavdija Kutnar, dekanja Fakultete za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem predstavi organizacijo 8. evropskega matematičnega kongresa, ki bo od 5. do 11. julija 2020 v Portorožu. Člane DMFA Slovenije povabi k sodelovanju predvsem pri obkongresnih dejavnostih

O spremenjenem Pravilniku o podeljevanju društvenih priznanj poroča Boštjan Kuzman. Najpomembnejša sprememba je, da članstvo v DMFA ni več potreben pogoj za prejem priznanja.

Potrjen je sklep upravnega odbora, da se prijavnina za udeležbo na tekmovanjih v šolskem letu 2018/2019 ne spremeni, če se ne bodo bistveno spremenili pogoji sofinanciranja.

Za tekmovanja, ki se končajo z mednarodno olimpijado (MaSŠ-A, FiSŠ, astronomija SŠ), je prijavnina na najnižji stopnji **2,50 EUR**, za vsa druga tekmovanja v organizaciji DMFA Slovenije pa **1,50 EUR**. Za udeležbo na višjih stopnjah tekmovanja prijavnine ni.

Ad 7. O sklepih nadzornega odbora je poročal Janez Krušič:

- pravilnost finančnega poslovanja za leto 2017 je nadzorni odbor ugotovil na svoji seji 23. 3. 2018;
- z delom upravnega odbora je nadzorni odbor vseskozi seznanjen, bodisi s prisotnostjo na sejah, bodisi z zapisniki sej upravnega odbora;
- v delu upravnega odbora do občnega zbora nadzorni odbor ni zaznal nepravilnosti v tekočem letu in ne vidi razlogov za njegovo razrešitev ob zaključku mandata.

Podatki iz bilance stanja in izkaza poslovnega izida za leto 2017:

Prihodki:	307.399 EUR
Stroški	304.863 EUR
Poslovni izid	**2.536** EUR
Saldo 31. 12. 2017	**94.434** EUR

Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2017 je soglasno sprejeto.

Ad 8. Na predlog delovnega predsednika občni zbor razreši dosedanji upravni odbor, nadzorni odbor in častno razsodišče.

Delovni predsednik se članom razrešenih organov zahvali za njihovo uspešno delo.

Janez Krušič predstavi kandidatno listo za voljene organe DMFA Slovenije za obdobje 2018–2020.

Vsi predlagani kandidati so soglasno izvoljeni.

Za izkazano zaupanje se zahvali izvoljeni predsednik Dragan Mihailović in predstavi nekatera področja delovanja društva, ki jim bo posvečena posebna pozornost in skrb.

Ad 9. Občni zbor se je končal ob 18. uri in 30 minut.

Janez Krušič in Nada Razpet

PRAVILNIK O PODELJEVANJU DRUŠTVENIH PRIZNANJ

1. člen
(Priznanje za delo z mladimi)

Priznanje za neposredno delo z mladimi lahko prejme posameznik ali posameznica, ki:

- s svojim delom izboljša pouk matematike, fizike ali astronomije v osnovni, srednji ali visoki šoli;
- razširja zanimanje za svoje strokovno področje med učenci, jih uspešno uči in usmerja v šolskih ali obšolskih dejavnostih, tako da dosegajo vidne uspehe;
- sodeluje s strokovnimi objavami, predvsem v društvenih publikacijah in s tem izdatno prispeva k popularizaciji svojega predmeta ali k izboljšanju poučevanja.

2. člen
(Priznanje za strokovno dejavnost)

Priznanje lahko prejme tudi posameznik ali posameznica, ki neposredno sicer ne dela z mladimi, je pa njegova oziroma njena društvena, pedagoška, publicistična ali znanstveno-raziskovalna dejavnost tako izrazita, da pozitivno vpliva na razvoj, popularizacijo in ugled matematike, fizike in astronomije v Sloveniji ali na mednarodni ugled slovenske znanosti.

3. člen
(Priznanje za uspešno sodelovanje z Društvom)

Društvo lahko podeli priznanje tudi organizacijam ali posameznikom ali posameznicam za njihov izjemen prispevek in uspešno sodelovanje pri rednih ali priložnostnih dejavnostih Društva.

4. člen
(Nagrada)

Pisno priznanje za posameznika ali posameznico spremlja simbolična nagrada, namenjena spodbujanju nadaljnjega dela, katere obliko vsakokrat določi upravni odbor DMFA Slovenije.

5. člen
(Razpis)

Razpis za podelitev društvenih priznanj mora biti objavljen vsako leto na spletni strani DMFA ali v reviji Obzornik za matematiko in fiziko vsaj tri mesece pred rednim občnim zborom DMFA Slovenije.

6. člen
(Vložitev predloga)

Pisni predlog za podelitev priznanja lahko vložijo posamezni člani in članice ali pa skupina članov ali članic DMFA Slovenije. Obsegati mora dovolj podatkov, da je ob nadaljnjem odločanju mogoča vsestranska presoja.

7. člen
(Komisija za društvena priznanja)

Predloge obravnava Komisija za društvena priznanja (v nadaljevanju Komisija), ki jo imenuje Upravni odbor za mandatno obdobje dveh let. Predsednik oziroma predsednica Komisije je predsednik oziroma predsednica DMFA Slovenije.

8. člen
(Delo komisije)

Komisija je odgovorna za izvedbo naslednjih aktivnosti:

- V tekočem koledarskem letu poskrbi za pravočasno objavo razpisa.
- Po izteku roka za vložitev pregleda prispele predloge ter o njih odloči.
- Odločitev o posameznem predlogu sporoči njegovim predlagateljem in s seznamom prejemnikov seznani Upravni odbor.
- Prejemnike in prejemnice priznanj pisno povabi na slovesno podelitev najkasneje 14 dni pred podelitvijo.
- Poskrbi za natis priznanj in pripravo simboličnih nagrad.
- V društvenih publikacijah objavi pisno informacijo o prejemnikih priznanj s kratko utemeljitvijo.

9. člen
(Podelitev priznanj)

Priznanja podeli predsednik oziroma predsednica Društva ali njegov oziroma njen pooblaščenec na rednem občnem zboru.

V Ljubljani, 13. 11. 2018

prof. dr. Dragan Mihailović
predsednik DMFA Slovenije

Andreja Grom, Andrej Guštin in Marta Zabret prejemniki priznanj DMFA Slovenije

Komisija za društvena priznanja, v sestavi Dragan Mihajlović (predsednik), Boštjan Kuzman in Barbara Rovšek, je na osnovi prejetih predlogov izbrala tri prejemnike priznanj za leto 2018. To so:

- Andreja Grom, OŠ Otočec, za dolgoletno uspešno in predano poučevanje matematike in fizike v osnovni šoli,
- Andrej Guštin, Vegova ERSŠ in gimnazija, Ljubljana, za kvalitetno strokovno delo na področju tekmovanj in pri širši popularizaciji astronomije v Sloveniji,
- Marta Zabret, Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik, za predano pedagoško delo in objavljene medijske prispevke o pomenu poučevanja matematike.

Slika 1. Andreja Grom, Andrej Guštin in Marta Zabret.

Priznanja je podelil predsednik DMFA Slovenije na Občnem zboru 23. novembra 2018 v Dobrni. Utemeljitve so objavljene na spletni strani DMFA Slovenije. Zahvaljujemo se vsem predlagateljem za dobro utemeljene predloge, prejemnikom priznanj pa še enkrat čestitamo za njihovo navdihujoče pedagoško in strokovno delo, ki odmeva tako med stanovskimi kolegi kot tudi v širši javnosti.

V nadaljevanju objavljamo utemeljitve, ki jih je na osnovi prejetih predlogov pripravila komisija.

Andreja Grom je diplomirala na Pedagoški akademiji v Ljubljani. Od leta 1975 do upokojitve je na OŠ Otočec poučevala matematiko in fiziko, občasno tudi izbirni predmet astronomija, krajša obdobja pa je bila tudi ravnateljica šole, vodja aktiva učiteljev matematike občine Novo mesto in vodja študijske skupine za fiziko.

Ko se je zaposlila na OŠ Otočec, je pouk potekal v stari stavbi v dveh izmenah. Šola ni imela specialnih učilnic ali kabinetov in je bila skromno založena z učili, zato je sama izdelala številne preproste pripomočke za fizikalne eksperimente in k temu pritegnila tudi učence. Ko je bila dograjena nova šola, si je prizadevala, da bi tudi matematika in fizika dobili specialno učilnico, in poskrbela, da so bila nabavljena vsa učila, ki so bila takrat dostopna.

Bila je prava promotorka znanja naravoslovja na šoli. Mlade je znala spodbujati k vedoželjnosti z drugačnimi in zanimivejšimi metodami dela in prijavljanjem na raziskovalne naloge s področja naravoslovja, ki sta jih razpisali reviji Pionirski list (danes Pil) ali Pionir (danes Gea). Tako so učenci merili radioaktivnost, določali zemljepisno lego domačega kraja in izdelali sončno uro.

Kot neutrudna mentorica je v okviru dodatnega pouka in številnih prostovoljnih ur učence pripravljala na tekmovanja najprej pri matematiki in fiziki, kasneje pri logiki in razvedrilni matematiki, nazadnje tudi pri astronomiji. Ti so začeli dosegati opazne uspehe najprej na občinskih in regijskih tekmovanjih, kasneje pa tudi na republiških oziroma državnih tekmovanjih, kjer so njeni učenci postali celo prvaki iz logike, matematike, razvedrilne matematike in fizike. Neutrudno je vrsto let sodelovala tudi v različnih tekmovalnih komisijah in pri organizaciji tekmovanj, za katera je pridobivala tudi sponzorje in urejala bilten. K dejavnosti je pred upokojitvijo pritegnila tudi učitelje nižjih razredov in razrednega pouka.

Posebno pozornost je namenjala tudi učencem, ki sta jim matematika in fizika povzročali težave. Zanje je poleg dopolnilnega pouka namenjala še dodatne ure. Tudi učencem športnikom ali odsotnim zaradi bolezni je namenjala posebne ure, da so lahko nadoknadili zamujeno. Za učence si je vedno vzela čas in jih dobro pripravila na delo v srednji šoli, pomagala pa jim je tudi še potem, ko so obiskovali srednjo šolo ali celo fakulteto.

S svojim vestnim in strokovnim delom je prispevala k izboljšanju pouka matematike v osnovni šoli. Že zelo zgodaj je začela pri pouku uporabljati računalnik. Z odnosom do znanja in izobraževanja je bila zgled mlajšim učiteljem. Meni, da mora učitelj nenehno slediti stroki predmeta, ki ga poučuje, ter novim spoznanjem na področju psihologije in pedagogike, da lahko učencem približa predmet, ki ga poučuje. Svoje delo mora imeti preprosto rad. Povezovati se mora z učitelji s sosednjih šol, da izmenjuje izkušnje, se tako bogati in napreduje, za svoja dejanja pa mora znati sprejemati odgovornost.

Andrej Guštin s svojim delom izboljšuje pouk astronomije v osnovnih in srednjih šolah, razširja zanimanje za astronomijo med učenci, jih zelo uspešno vodi na mednarodnih tekmovanjih, kjer dosegajo vidne uspehe, ter popularizira astronomijo s poljudnimi in strokovnimi objavami v društvenih in drugih publikacijah. Po mnenju sodelavcev je imel Andrej Guštin največji vpliv na povečano astronomsko aktivnost v okviru DMFA Slovenije in v šolah v zadnjih desetih letih.

Ob Mednarodnem letu astronomije 2009 je dal pobudo, da bi DMFA Slovenije uvedlo tudi tekmovanje v znanju astronomije. Od takrat se je tekmovanje med učitelji in učenci zelo dobro uveljavilo, za kar ima zasluge predvsem Andrej Guštin, ki ob pomoči majhnega števila sodelavcev deluje kot glavni motor in duša tega tekmovanja. Je tajnik komisije za popularizacijo astronomije in glavni sestavljalec nalog, pri čemer so ključnega pomena njegovo strokovno znanje, pedagoške izkušnje ter občutek za jezik in razlage prilagojene starosti učencev. Ob uvedbi tekmovanja je imel vizijo postopoma dvigniti znanje tekmovalcev do takega nivoja, da se bodo najboljši srednješolci lahko uspešno udeleževali mednarodnih tekmovanj. Cilj je dosegel že četrto leto: na njegovo pobudo so se naši dijaki leta 2013 prvič udeležili 7. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike v Grčiji in na njej osvojili dve srebrni medalji in dve pohvali. V naslednjih letih je sledilo še več uspehov, ki jih je jeseni 2017 kronala zlata medalja in absolutna zmaga Alekseja Jurce na 11. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike na Tajskem. Na pobudo Andreja Guština naši dijaki od leta 2015 sodelujejo tudi na Sanktpeterburški astronomski olimpijadi, naša olimpijska ekipa pa se je zadnji dve leti pomerila z madžarsko in hrvaško ekipo na Astronomskem tekmovanju treh dežel. Poleg uvedbe tekmovanja je Andrej Guštin prispeval k izboljšanju poučevanja astronomije v šolah tudi z več delavnicami in predavanji za izobraževanje učiteljev, ki jih je imel v okviru strokovnih srečanj DMFA Slovenije (2010, 2012, 2014, 2015, 2016) in s strokovno-pedagoškimi prispevki v društvenih in drugih publikacijah.

Andrej Guštin je izvrsten in zelo ploden pisec poljudnih in strokovnih prispevkov o astronomiji za različne generacije. Že 25 let je redni sodelavec astronomske revije Spika, za katero je napisal več kot 50 avtorskih prispevkov. V Preseku je objavil 46 prispevkov, v reviji Gea 45, reviji Moj planet 39, v Proteusu 35, pisal pa je tudi za Delo, Obzornik za matematiko in fiziko, Ciciban, PIL idr.

K popularizaciji astronomije tako med mladimi kot tudi v širši javnosti je prispeval tudi z aktivnim sodelovanjem pri Mednarodnem letu astronomije 2009, v zadnjih letih pa med drugim kot so-organizator tednov astronomije v Idriji in kot (so)avtor razstav, ki jih je pripravil v sodelovanju s Prirodoslovnim muzejem in drugimi: 2015 – Svetloba, ujeta v kamen, 2016 – Črne luknje, 2017 – Tretji kamen od Sonca, 2018 – Zvezdni kamni.

Marta Zabret, specialistka matematičnega izobraževanja, že 32 let poučuje matematiko na Gimnaziji in srednji šoli Rudolfa Maistra Kamnik. S pedagoškim delom je začela že v študentskih letih. Značilni zanjo so vera v življenje, humor in dobronamernost, zaupanje v ljudi. Tako dijakom prisluhne in pomaga tudi zunaj učilnice. Nekatere dijake je na matematična tekmovanja uspešno pripravljala kar v domači kuhinji.

Vrsto let je v različnih časopisih, revijah in drugih glasilih objavljala članke, ki obravnavajo probleme v poučevanju in njene lastne izkušnje na tem področju. Za vse to publicistično delo so značilni odrezavost in humor, strpnost, konkretnost. Tako imamo devet prispevkov v Delu, štiri v Večeru, šest v Šolskih razgledih, 28 v Dnevniku ter posamezne članke za Obzornik za matematiko in fiziko, Presek in zbornik ob devetdesetletnici prof. Ivana Vidava.

V svojih intervjujih in nastopih je vseskozi opozarjala na pomen dobre matematične izobrazbe. Z veliko poguma je javno nasprotovala preveč permisivni interpretaciji pravic učečih in opozorila, da to vodi k pomanjkanju odgovornosti in škodi praktično vsem. Njen protest je pripomogel k dobrodošlim spremembam.

Spodbujena s pozitivnim odmevom je napisala knjigo Martematične prigode, ki je leta 2017 izšla pri DMFA-založništvo in je doživela že drugo naklado. Vsebina se vrti okrog njenih izkušenj s poučevanjem matematike na srednji šoli in na gimnaziji ter z zgodbami njenih dijakinj in dijakov. V poglavju Prigode stvarno obravnava tudi dileme v poučevanju, denimo uporabo tehnologije, v poglavju Državna šola, zlata jama pa opisuje boj z dobičkarstvom na račun javnega šolstva. Knjiga ima tudi čisto matematične vsebine, denimo v obliki problemov. Besedila so izpiljena in večinoma napisana strnjeno; včasih prav minimalistično, brez odvečnih besed. Jezik je lep, bogat in izražanje pogosto prav mojstrsko.

Njeno veselje do poučevanja, njena vera v mladino in prepričanje, da skoraj vsakega z nekaj interesa in volje do dela lahko izobrazimo, so nalezljivi. Ni presenetljivo, da je dobila po izidu knjige več prošenj za intervjuje, ki jih je znala tudi dobro izkoristiti za ugoden prikaz naše stroke. Lahko smo zadovoljni, da imamo Marto, ki tako simpatično, profesionalno in uspešno predstavlja matematiko in poučevanje matematike v širši javnosti.

Boštjan Kuzman

Prenos matematične revije iz okvira mednacionalke

V reviji *Newsletter of the European Mathematical Society* je bil septembra objavljen članek [1]. Glavni uredniki revije *Journal of Algebraic Combinatorics* v njem opisujejo, kako so poleti 2017 kolektivno dali odpoved založbi Springer, izdajateljici revije. Obenem so že začeli priprave na izdajo nove revije *Algebraic Combinatorics.* Ta je začela izhajati januarja 2018. Novo revijo izdaja *Centre Mersenne*, ki je na Univerzi v Grenoblu v Franciji.

Pobudnik in organizator tega prenosa je bila ustanova *MathOA*. Sedež ima na Nizozemskem. Deluje šele zadnjih nekaj let in namerava nadaljevati s tovrstno aktivnostjo. Njen cilj je na podoben način dobiti več matematičnih revij, ki zadoščajo modelu *Pošten odprti dostop (Fair Open Access*, FAO). Želijo zmanjšati število revij z ogromnimi naročninami in visokimi cenami za kopije člankov. Nudijo pravno in drugo pomoč. Prav izdajanje znanstvene literature je primer dejavnosti, kjer prosti trg ne deluje.

Financerji revij modela FAO so večinoma knjižnice. Osnovna načela modela FAO so:

- Revija ima pregledno lastniško strukturo; je pod nadzorom znanstvene skupnosti in ji služi.
- Pisci člankov obdržijo avtorske pravice.
- Vsi objavljeni članki so prosto dostopni in uporabljena je licenca, ki dovoljuje prosti dostop.
- Predložitev članka in objava nista pogojena s plačilom pristojbine s strani avtorja ali ustanove, ki ga zaposluje; prav tako nista pogojena s članstvom v ustanovi ali društvu.
- Vse pristojbine, plačane v imenu revije založnikom so nizke, pregledne in sorazmerne z opravljenim delom.

(Denimo, *Algebraic Combinatorics* avtorjem za lektoriranje zaračunava 7 evrov na stran.)

Take prehode je olajšal nov, prosto dostopni sistem revialnega urejanja OJS (*Open Journal Systems*). Centre Mersenne zagotavlja tudi zelo ugodno pridobitev DOI. Kratice pomenijo *Identifikator digitalnega objekta*. To je enolična oznaka elektronske publikacije in omogoča tudi lokacijo vira.

Financerji nove revije so bili *Foundation Compositio Mathematica* in francoske ter nemške knjižnične organizacije. Za knjižnice je taka podpora logična: drago naročnino nadomestijo z veliko cenejšo. Žal veliki založniki z vztrajanjem pri prodaji paketov, v katerih je veliko revij, precej uspešno blokirajo take varčevalne ukrepe.

Drugi način, da pridemo do nižjih cen revij, je dodatna finančna podpora obstoječim malim revijam, ki jih navdušenci izdajajo z minimalnimi stroški ob prostovoljnem delu. To je najcenejši in najboljši način, saj imajo te revije že ugled in ocene, kot je faktor vpliva [3]. Novo ustanovljene revije, tudi če so reinkarnacija vrhunskih, za to potrebujejo čas. Že pred leti so izraelski matematiki povedali, da izdajajo revijo, katere naročnina je ena desetina cene podobno obsežne in kakovostne komercialne revije.

V letu 2018 je začela delovati mreža prosto dostopnih revij – *Free Journal Network*. V njej je zdaj 24 matematičnih revij.

Nekateri (morda tudi neiskreno) izražajo strah, da tovrstne neodvisne revije ne morejo zagotoviti, da bodo članki dostopni tudi v prihodnosti. Vendar, ko so skoraj vsi uredniki zapustili Springerjevo revijo *K-Theory*, je ta kmalu propadla, nato pa je elektronski arhiv starih številk za več let izginil. Springer obvladuje okrog 12 odstotkov svetovnega trga znanstvenih publikacij in beleži visoke dobičke. Ker so članki v FAO revijah prosto dostopni, jih ljudje prenašajo na svoje računalnike in je tako zelo majhna verjetnost, da bi izginili.

Springer skuša obdržati revijo *Journal of Algebraic Combinatorics* pri življenju. Zaradi solidarnosti med algebraičnimi kombinatoriki pa je za glavnega urednika dobil po [2] le človeka brez člankov na tem področju in tudi bibliografije preostalih članov uredniškega odbora naj večinoma ne bi bile prepričljive. Mimogrede, glavni urednik take komercialne revije zasluži kakih osem do deset tisoč USD letno. Recenzenti, kot vemo, delajo zastonj. Zato vodilni avtor članka v EMS Newsletter poziva matematike, naj ne opravljajo tovrstnega zastonjskega dela za revije z oderuškimi naročninami in visokimi cenami za kopije člankov.

Visoke cene revij še bosebej prizadenejo vede s skromnim financiranjem, kamor sodi prav matematika.

Pojavile so se tudi nove komercialne založbe z bolj dostopnimi cenami. Primer je založba *Ubiquity Press*, ki jo je ustanovil University College London. Za prosto dostopne članke v svojih revijah zaračunava avtorju ali njegovemu delodajalcu okrog 500 EUR. To je še zmeraj manj kot pri nekaterih drugih revijah, ki jih izdajajo britanske univerze ali društva, in precej manj kot pri največjih založnikih. Ta vsota se lahko zmanjša ali pa avtorja oprostijo plačila. V letu 2015 je recimo uredniški odbor lingvistične revije *Lingua* zapustil založbo Elsevier in začel novo revijo *Glossa*, ki jo zdaj izdaja Ubiquity Press.

Mimogrede, Ubiquity Press za elektronsko prosto dostopne knjige (brez papirne verzije) zaračunava avtorjem okrog 4000 do 9000 britanskih funtov, glede na obseg. To vključuje recenzijo, lektoriranje in indeksiranje. Zadnji dve postavki nista obvezni in se tako cena lahko zniža.

Prenos revije se lahko tudi zaplete, če so akterji brez poslovnih izkušenj. Opisan je bil primer, ko je skoraj celoten uredniški odbor zapustil velikega založnika in se kljub opozorilom dal prepričati, da »prehodno« novo revijo vodi v okviru podjetja enega od urednikov. Prehodna faza pa se ni in ni končala … Zdaj je večji del uredniškega odbora, bogatejši za novo izkušnjo, pomagal ustanoviti tretjo revijo, ki jo izdaja neprofitna založba.

Sicer pa so dobro pripravljeni prehodi praktično zmeraj uspešni, tudi če prejšnja revija morda ostane pri življenju.

Zanimiv primer je še *MSP*, neprofitna znanstvena založba s sedežem v kalifornijskem Berkeleyju, ki ima v nadzornem odboru več znanih matematikov. Prakticira *Zeleni odprti dostop, Green Open Access* [4], ki je še zmeraj prijazen. Avtor nima finančnih obveznosti. Revijo financirajo naročnine. Članki postanejo prosto dostopni po pet letih, avtor pa lahko na prosto dostopni *arXiv* takoj da verzijo s popravki po recenziji, vendar brez lektoriranja. Dodati mora še povezavo do končne verzije članka v reviji. Naročnina na MSP-jevo revijo z 2000 stranmi je okrog 800 USD za elektronsko in tiskano verzijo. Sodelujejo tudi z *Založbo Evropskega matematičnega društva (EMS Publishing House)* in ponujajo skupen paket okrog trideset elektronskih revij za nekaj več kot 7000 USD. Založba MSP prodaja tudi programsko opremo za urejanje revij z imenom *EditFlow*.

Za barvit prikaz dogajanja, ki je omogočilo velikim založnikom znanstvenih revij ne samo ogromne dobičke, ampak tudi ne ravno benigen vpliv na delo znanstvene skupnosti, preberite še članek [5]. Opisuje, kako sta dva britanska poslovneža kot po tekočem traku ustanavljala nove drage znanstvene revije in z agresivnim prepričevanjem pridobivala vrhunske znanstvenike kot urednike. Le redki med njimi so se zavedali, da to pomeni zmeraj hujšo finančno obremenitev za univerzitetne in inštitutske knjižnice. Vlogo glavnega urednika so skoraj vsi sprejeli, ker je to pomenilo nove možnosti objavljanja, pa seveda čast in vpliv. In tako se je del denarja iz državnih podpor znanosti začel stekati drugam, kot je bilo mišljeno. Komercialna usmeritev prestižnih in dragih znanstvenih revij v nekaterih vedah močno vpliva na to, kakšni rezultati imajo prednost pri objavi.

Velikanski dobički omogočajo nekaj velikim korporacijam, ki izdajajo znanstveno literaturo, vpliv v medijih in politiki. Evropska komisija je za enega od izvajalcev monitoringa trga odprtih publikacij zadolžila … založbo Elsevier (ki obvladuje 16–24 odstotkov svetovnega trga znanstvenih publikacij). Mimogrede, bral sem, da tudi v likovni umetnosti marsikje kustosi in finančniki usmerjajo »umetniško« produkcijo.

LITERATURA

[1] M. C. Wilson, H. van Maldeghem, V. Reiner, C. Athanasiadis, A. Munemasa in H. Thomas, *Flipping JACO*, EMS Newsletter **109** (2018), 38–41.

[2] M. C. Wilson, *AlCo vs JACo – a stark comparison*, dostopno na `mcw.blogs.auckland.ac.nz/2018/04/19/alco-vs-jaco-a-stark-comparison/`, ogled 21. 12. 2018.

[3] M. C. Wilson, *Free and Fair Open Access Journals: Flipping, Fostering, Founding*, Notices of the AMS, 2018, 817–820, dostopno na `www.ams.org/journals/notices/201807/rnoti-p817.pdf`, ogled 21. 12. 2018.

[4] *MSP and Open Access*, dostopno na `msp.org/publications/oa/`, ogled 21. 12. 2018.

[5] S. Buranyi, *Is the staggeringly profitable business of scientific publishing bad for science?* The Guardian, 2017, dostopno na `www.theguardian.com/science/2017/jun/27/profitable-business-scientific-publishing-bad-for-science`, ogled 21. 12. 2018.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2018
Letnik 65, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Mikroskopska slika množice steklenih kroglic premera 2,3 μm v vodi. Vsaka kroglica je ujeta v svoji optičnih pasti. Višina ene »črke« je približno 25 μm (zgornja slika). Ko pasti izklopimo, začnejo kroglice prosto difundirati. Spodnja slika je posneta 7 s po izklopu pasti. Fizikalno podkovan bralec lahko iz razlike leg kroglic med obema slikama grobo oceni viskoznost vode (glej članek na straneh 171–183).