IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2023
Letnik 70
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 70 • ŠT. 4 • STR. 121-160 • DECEMBER 2023

C M Y K

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, DECEMBER 2023, letnik 70, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** `tajnik@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d. d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Uredniški odbor: Peter Legiša, Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Tadeja Šekoranja (tehnična urednica).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 200 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2023 DMFA Slovenije

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

FILONOVA PREMICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2020): 01A20, 51M15, 51M16, 51M25

Filonova premica skozi izbrano točko v notranjosti danega kota seka njegova kraka tako, da je razdalja med presečiščema najmanjša. Geometrijska konstrukcija Filonove premice na splošno ni mogoča samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Problem vodi do kubične enačbe, katere edini pozitivni koren natančno določa Filonovo premico. Pojasnili bomo njene glavne lastnosti. Do Filonove premice pridemo tudi s presečiščem krožnice in hiperbole.

THE PHILON LINE

The Philon line through a selected point inside a given angle intersects its two arms in such a way that the distance between the intersections is the shortest. In general, the geometric construction of a Philon line is not possible only with an unlabelled ruler and pair of compasses. The problem leads to a cubic equation, whose only positive root exactly determines the Philon line. We will explain its main properties. The Philon line is also obtained by the intersection of a circle and a hyperbola.

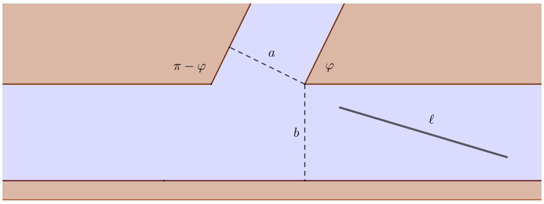
Uvod

Zamislimo si vodna kanala (slika 1). Prvi ima smer vzhod–zahod in je širok b, drugi, ki je širok a, pa vstopa vanj pod kotom φ. Na vodi plava tanka ravna lesena letvica dolžine ℓ. Kako dolga je še lahko letvica, da lahko neovirano prehaja med kanaloma? V skrajnem primeru se letvica lahko dotakne vogalov, krajišči pa robov kanalov. To pomeni, da je treba poiskati najmanjšo dolžino letvice, ki ravno še dopušča tak ekstremen položaj. Na sliki je $\varphi < \pi - \varphi$, zato je iskana ekstremna dolžina večja, če letvica oplazi vrh kota $\pi - \varphi$, kot če se dotakne vrha kota φ.

Primer, ko je kot φ pravi, pogosto najdemo med nalogami poglavja o ekstremih funkcije ene spremenljivke v matematični analizi. Spoznali bomo, da naloga za splošne kote ni nič težja, če se jo lotimo prav.

V prispevku bomo nalogo reševali za kote med 0 in π in ugotovili, da pri tem igra pomembno vlogo tako imenovana *Filonova premica*, ki je dobila ime po antičnem mehaniku, matematiku in pisatelju Filonu iz Bizanca, tudi Filonu Mehaniku, ki je živel v 3. stoletju pr. n. št.

O samem Filonu je malo znanega. Večinoma je deloval v Aleksandriji, verjetno v slovitem Muzejonu, in na Rodosu. Napisal je delo *Priročnik mehanike*, ki ga je sestavljalo 9 knjig, v katerih je obravnaval tudi nekaj



Slika 1. Problem plavajoče letvice in kanalov.

matematičnih problemov, najbolj pa se je posvetil gradnji pristanišč, mehaniki, katapultom, oblegovalnim in obrambnim napravam ter menda celo tajnopisom (glej [1]). V celoti je ohranjena v grščini le 4. knjiga, nekatere pa v arabskem prevodu. V matematiki je reševal problem podvojitve kocke in dal nekaj alternativnih dokazov trditev iz Evklidovih Elementov (eden od teh je objavljen v [5]).

Filonova premica

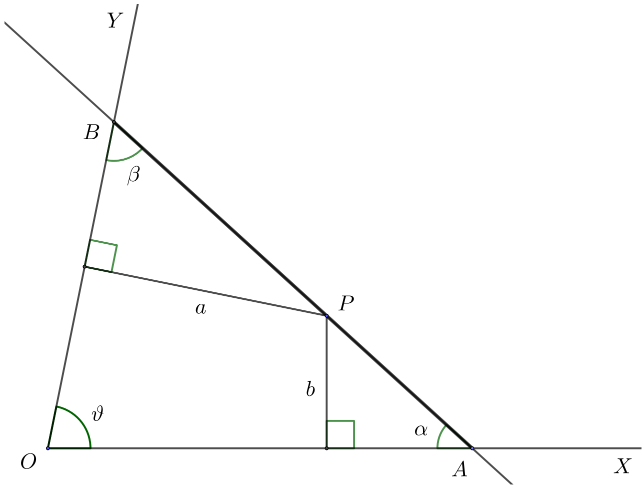
Problema letvice in kanalov se lotimo najprej geometrijsko. Dovolj je obravnavati kot $\vartheta = \angle XOY$ z vrhom O in krakoma OX in OY (slika 2). Pri tem je $0 < \vartheta < \pi$. Znotraj kota naj bo točka P, ki je od kraka OX oddaljena za b, od kraka OY pa za a. Skozi P načrtamo premico, ki seka krak OX v točki A, krak OY pa v točki B. Poiskati je treba tisto premico, za katero je razdalja $|AB|$ najmanjša. Tej premici rečemo *Filonova premica* skozi točko P v kotu ϑ. Filonova premica je odvisna od kota in od točke v njem. S preprostim sklepanjem ugotovimo, da obstaja taka premica. Če namreč A dovolj oddaljimo od O, lahko razdalja $|AB|$ doseže poljubno veliko vrednost, če pa jo približujemo O, se B oddaljuje od O in spet $|AB|$ doseže poljubno veliko vrednost. Kasneje bomo to potrdili tudi z računom.

V trikotniku OAB označimo kota ob ogliščih A in B z α in β. Seveda velja zveza $\alpha + \beta + \vartheta = \pi$ in relaciji $0 < \alpha < \pi - \vartheta$ ter $0 < \beta < \pi - \vartheta$. Razdaljo $\ell(\alpha) = |AB| = |AP| + |PB|$ izrazimo s kotom α:

$$\ell(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin(\pi - \vartheta - \alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin(\alpha + \vartheta)}.$$

S tem smo na intervalu $(0, \pi - \vartheta)$ definirali pozitivno funkcijo $\ell : \alpha \mapsto \ell(\alpha)$. Njena prva dva odvoda sta

$$\ell'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{a\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin^2(\alpha+\vartheta)} = \frac{a\cos\beta}{\sin^2\beta} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$



Slika 2. Presečnica kota skozi dano točko.

$$\ell''(\alpha) = \frac{b(1+\cos^2\alpha)}{\sin^3\alpha} + \frac{a(1+\cos^2\beta)}{\sin^3\beta}.$$

Enačba $\ell'(\alpha) = 0$ ima na intervalu $(0, \pi - \vartheta)$ eno samo rešitev α_0, v kateri je očitno lokalni minimum funkcije ℓ. S kotom α_0 je Filonova premica natančno določena. Kot ob oglišču B pa je tedaj $\beta_0 = \pi - \vartheta - \alpha_0$.

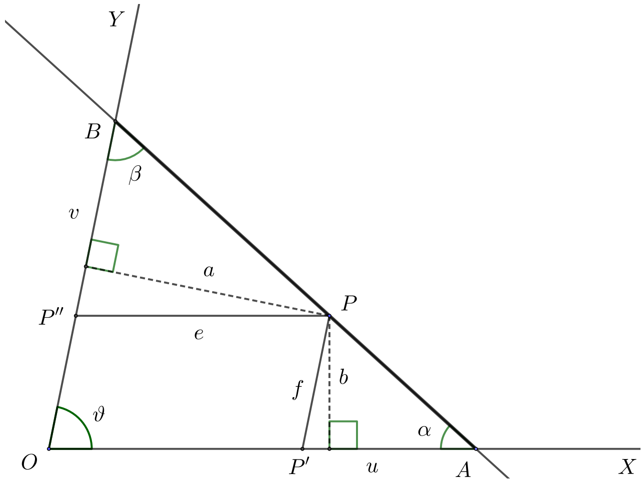
Koordinatna obravnava

S funkcijo ℓ se da izpeljati lastnosti Filonove premice. Težava nastopi pri reševanju trigonometrične enačbe $\ell'(\alpha) = 0$. Laže pa vsa obravnava Filonove premice poteka z uporabo koordinat. Točko P v kotu ϑ bomo opisali s poševnokotnima koordinatama, tako kot kaže slika 3. Točko P projiciramo vzporedno s krakoma OY in OX v točki P' in P''. Označimo $e = |P''P|$ in $f = |P'P|$, ki ju imenujemo *poševnokotni koordinati* točke P za kot ϑ. Nato vpeljemo še $u = |P'A|$ in $v = |P''B|$, ki ju bomo imeli za spremenljivki. Kot bomo videli, sta med seboj odvisni. Pri tem seveda veljata zvezi $a = e\sin\vartheta$ in $b = f\sin\vartheta$.

Ploščino trikotnika OAB izrazimo kot vsoto ploščin paralelograma $OP'PP''$ in trikotnikov $P'AP$ ter $P''PB$:

$$ef\sin\vartheta + \frac{1}{2}uf\sin\vartheta + \frac{1}{2}ve\sin\vartheta = \frac{1}{2}(e+u)(f+v)\sin\vartheta.$$

Po poenostavitvi dobimo preprosto zvezo med u in v: $uv = ef$.



Slika 3. Poševnokotni koordinati točke.

Kvadrat dolžine daljice $|AB|$ izrazimo s kosinusnim izrekom:

$$|AB|^2 = (e+u)^2 + (f+v)^2 - 2(e+u)(f+v)\cos\vartheta.$$

Zaradi zveze $uv = ef$ lahko izločimo v in dobimo najprej

$$z(u) = |AB|^2 = (e+u)^2 + (f+ef/u)^2 - 2(e+u)(f+ef/u)\cos\vartheta,$$

nato pa s poenostavitvijo

$$z(u) = \frac{(e+u)^2}{u^2}(u^2 + f^2 - 2fu\cos\vartheta).$$

Funkcija $z : u \mapsto z(u)$ je definirana, zvezna in odvedljiva na poltraku $(0, \infty)$, njen odvod pa je

$$z'(u) = \frac{2(e+u)}{u^3}(u^3 - fu^2\cos\vartheta + efu\cos\vartheta - ef^2).$$

Potreben pogoj za ekstrem funkcije z je enačba

$$u^3 - (f\cos\vartheta)u^2 + (ef\cos\vartheta)u - ef^2 = 0, \qquad (\star)$$

ki ima zagotovo vsaj en pozitiven koren, ker je za $u = 0$ izraz na njeni levi strani negativen, za dovolj velik pozitiven u pa pozitiven. Eksistenco minimuma funkcije z zagotavlja eksistenca minimuma funkcije ℓ.

Če so u_1, u_2, u_3 koreni enačbe $(\star)$, veljajo zanje Viètove formule

$$u_1 + u_2 + u_3 = f\cos\vartheta, \quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = ef\cos\vartheta, \quad u_1u_2u_3 = ef^2.$$

Zadnja formula dopušča, da so vsi trije koreni pozitivni ali pa dva negativna in en pozitiven ali pa dva konjugirano kompleksna in en pozitiven. Pokažimo, da prva možnost ne pride v poštev. Iz Viètovih formul dobimo

$$\frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \cdot \frac{1}{3}(1/u_1 + 1/u_2 + 1/u_3) = \frac{1}{9}\cos^2\vartheta.$$

Če bi bili vsi koreni pozitivni, potem bi bil prvi faktor v tej relaciji njihova aritmetična sredina, drugi faktor pa obrat njihove harmonične sredine. Ker harmonična sredina ne presega aritmetične sredine, je leva stran večja ali enaka 1, kar bi pomenilo, da je $\cos^2\vartheta \geq 9$, kar je protislovje. To pomeni, da ima enačba $(\star)$ natančno en pozitiven koren ξ. Za Filonovo premico je torej $|P'A| = \xi$ in $|P''B| = \eta = ef/\xi$. Hitro se da pokazati, da je η edini pozitivni koren enačbe

$$v^3 - (e\cos\vartheta)v^2 + (ef\cos\vartheta)v - e^2f = 0. \qquad (\star\star)$$

Za razdaljo $|AB|$ dobimo izraza

$$|AB| = \frac{e+\xi}{\xi}\sqrt{f^2 + \xi^2 - 2f\xi\cos\vartheta} = \frac{f+\eta}{\eta}\sqrt{e^2 + \eta^2 - 2e\eta\cos\vartheta}. \qquad (\star\star\star)$$

Do podobnega izraza pridemo, če namesto koordinat e in f uporabimo razdalji $a = e\sin\vartheta$ in $b = f\sin\vartheta$:

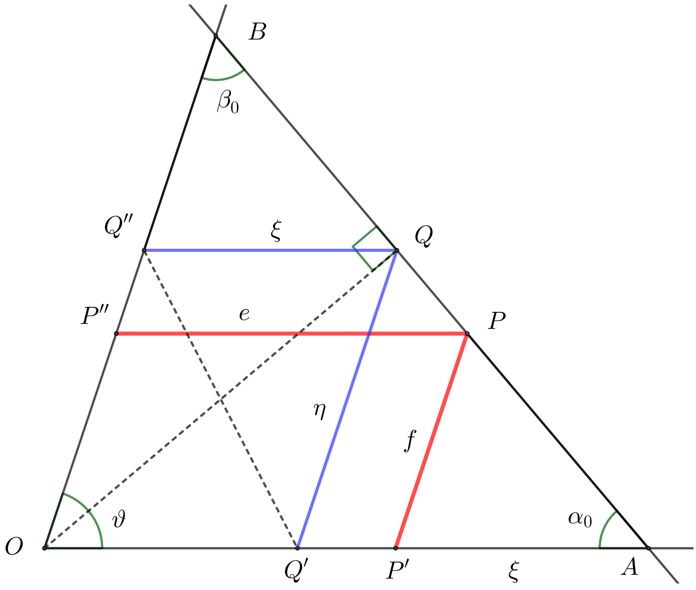
$$|AB| = \frac{a+\zeta}{\zeta\sin\vartheta}\sqrt{b^2 + \zeta^2 - 2b\zeta\cos\vartheta}, \qquad (\star\star\star')$$

pri čemer je ζ pozitivni koren enačbe

$$w^3 - (b\cos\vartheta)w^2 + (ab\cos\vartheta)w - ab^2 = 0, \qquad (\star')$$

V posebnem primeru, ko leži točka P na simetrali kota ϑ, je $e = f = \xi = \eta$ in $|AB| = 4e\sin(\vartheta/2)$. Takrat je Filonova premica kar pravokotnica v P na kotno simetralo.

Ko imamo Filonovo premico, vzporedno premaknemo trikotnik $P'AP$ tako, da pade P v B, A v Q in P' v Q'' (slika 4). Točka Q'' je seveda na daljici OB. Iz zvez $|OB| = f + \eta = f + |OQ''|$ sledi $|OQ''| = \eta$. Ker pa je še $|Q''Q| = \xi$, sta ξ in η poševnokotni koordinati točke Q za kot ϑ.



Slika 4. Filonova premica skozi dano točko.

Lastnosti Filonove premice

V prispevku nekajkrat uporabimo paralelogramsko enakost, ki pove, da je v paralelogramu vsota kvadratov stranic enaka vsoti kvadratov diagonal.

Točka Q je na Filonovi premici in ima, glede na to, kako smo do nje prišli, lastnost $|AP| = |QB|$. Dokazali pa bomo, da je Q pravokotna projekcija vrha O kota ϑ na Filonovo premico. V ta namen zapišemo paralelogramsko enakost za paralelogram $OQ'QQ''$:

$$2\xi^2 + 2\eta^2 = |OQ|^2 + |Q'Q''|^2.$$

Nato zapišemo še kosinusna izreka za trikotnika $Q''Q'Q$ in $Q''QB$:

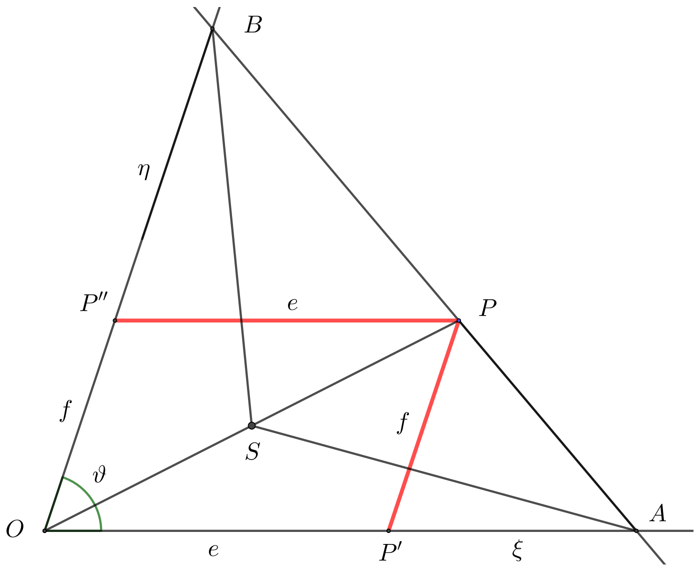
$$|Q'Q''|^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\vartheta, \quad |QB|^2 = \xi^2 + f^2 - 2\xi f\cos\vartheta.$$

Nazadnje izračunamo:

$$|OQ|^2 + |QB|^2 - |OB|^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) - (\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\vartheta) +$$

$$+(\xi^2 + f^2 - 2\xi f\cos\vartheta) - (f+\eta)^2 = \frac{2}{\xi}(\xi^3 - (f\cos\vartheta)\xi^2 + (ef\cos\vartheta)\xi - ef^2) = 0.$$

Pri tem smo upoštevali zvezo $\xi\eta = ef$ in enačbo ($\star$), ki ji zadošča ξ. Torej velja relacija $|OQ|^2 + |QB|^2 = |OB|^2$ in trikotnik OQB je pravokoten s pravim kotom ob oglišču Q.



Slika 5. K dokazu enakosti $|SA| = |SB|$.

Naj bo S središče daljice OP. Če skozi P poteka Filonova premica, ki preseka kraka kota ϑ v točkah A in B, potem sta razdalji $|SA|$ in $|SB|$ enaki. Ti dve razdalji sta dolžini težiščnic v trikotnikih OAP in OPB na skupno stranico OP. Kot posledico paralelogramske enakosti dobimo (slika 5)

$$(2|SA|)^2 + |OP|^2 = 2|OA|^2 + 2|AP|^2, \quad (2|SB|)^2 + |OP|^2 = 2|OB|^2 + 2|BP|^2.$$

Enakost $|SA| = |SB|$ bomo dokazali, čim dokažemo, da je

$$\delta = (|OA|^2 + |AP|^2) - (|OB|^2 + |BP|^2) = 0.$$

Dvakrat uporabimo kosinusni izrek in dobimo:

$$\delta = (e + \xi)^2 + \xi^2 + f^2 - 2\xi f \cos\vartheta - (f + \eta)^2 - \eta^2 - e^2 + 2\eta e \cos\vartheta.$$

Dobljeni izraz preoblikujemo v

$$\delta = \frac{2}{\xi}(\xi^3 - (f\cos\vartheta)\xi^2 + (ef\cos\vartheta)\xi - ef^2) - \frac{2}{\eta}(\eta^3 - (e\cos\vartheta)\eta^2 + (ef\cos\vartheta)\eta - e^2 f),$$

pri čemer upoštevamo, da je $\xi\eta = ef$. Ker ξ zadošča enačbi $(\star)$, η pa enačbi $(\star\star)$, je $\delta = 0$ in $|SA| = |SB|$.

Lastnosti Filonove premice

$$|AP| = |QB|, \quad OQ \perp AB, \quad |SA| = |SB|$$

so poznali že antični matematiki Filon iz Bizanca, Apolonij iz Perge in Heron iz Aleksandrije. Za $\vartheta = \pi/2$ so jih uporabili za reševanje problema podvojitve kocke.

Filonova premica, krožnica in hiperbola

Točka Q na Filonovi premici točke P v kotu $\vartheta = \angle XOY$ leži po Talesovem izreku na krožnici $\mathcal{K}$, ki ima za premer daljico OP. Če vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy, kjer je krak OX pozitivni del abscisne osi, os y pa v O pravokotna nanjo in orientirana na običajni način, ima $\mathcal{K}$ središče v točki $S((e+f\cos\vartheta)/2, (f\sin\vartheta)/2)$ in enačbo

$$x^2 + y^2 - (e + f\cos\vartheta)x - (f\sin\vartheta)y = 0. \qquad (\mathcal{K})$$

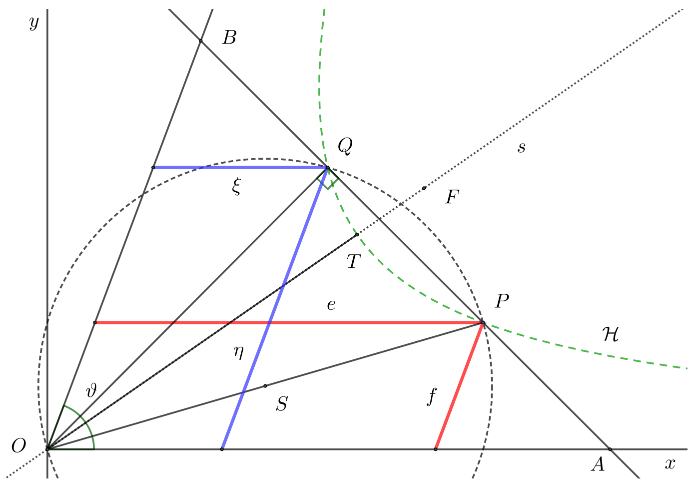
Kraka kota ϑ, podaljšana v premici z enačbama $y = 0$ in $x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = 0$ sta asimptoti hiperbole

$$y(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = c,$$

kjer je $c \neq 0$ poljubna konstanta. Skozi točko $P(e + f\cos\vartheta, f\sin\vartheta)$ poteka ena veja hiperbole $\mathcal{H}$, ki ima enačbo

$$y(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = ef\sin^2\vartheta. \qquad (\mathcal{H})$$

Teme T te veje leži na simetrali s kota ϑ in je od O oddaljeno $2\sqrt{ef}\cos(\vartheta/2)$, gorišče F pa $2\sqrt{ef}$ (slika 6).



Slika 6. Določitev Filonove premice s krožnico in hiperbolo.

Izračunajmo drugo presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in hiperbole $\mathcal{H}$. Iz enačbe ($\mathcal{H}$) izrazimo x in ga vstavimo v enačbo ($\mathcal{K}$), preuredimo in dobimo enačbo za y:

$$\frac{y - f\sin\vartheta}{y\sin^2\vartheta}(y^3 - (e\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + (ef\sin^2\vartheta\cos\vartheta)y - e^2 f\sin^3\vartheta) = 0.$$

Rešitev $y_1 = f\sin\vartheta$ je ordinata točke P, ustrezen $x_1 = e + f\cos\vartheta$ pa njena abscisa. Druga rešitev je ničla drugega faktorja. Vanj vstavimo $y = \lambda\sin\vartheta$, okrajšamo in dobimo enačbo

$$\lambda^3 - (e\cos\vartheta)\lambda^2 + (ef\cos\vartheta)\lambda - e^2 f = 0.$$

Primerjamo jo z enačbo ($\star\star$) in zapišemo edino pozitivno rešitev $\lambda = \eta$. Druga rešitev za y je zato $y_2 = \eta\sin\vartheta$. Za ustrezno absciso dobimo $x_2 = \xi + \eta\cos\vartheta$. Točka s koordinatama x_2 in y_2 pa je ravno točka Q na Filonovi premici. To pomeni, da se krožnica $\mathcal{K}$ in hiperbola $\mathcal{H}$ v primeru $e \neq f$ sekata v točkah P in Q, v primeru $e = f$ pa se v P dotikata (slika 6).

Vzemimo na obravnavani veji hiperbole $\mathcal{H}$ poljubno točko s poševnokotnima koordinatama u in v za kot ϑ. Njuni pravokotni koordinati sta $x = v\cos\vartheta + u$ in $y = v\sin\vartheta$. To upoštevamo v enačbi ($\mathcal{H}$) in dobimo: $uv = ef$.

Pri tem omenimo še eno lastnost hiperbole, ki je bila znana že Apoloniju iz Perge. Če premica preseka hiperbolo v točkah P in Q, njeni asimptoti pa v točkah A in B, potem imata daljici PQ in AB skupno središče, kar ima za posledico relacijo $|AP| = |QB|$. Analitični dokaz je na primer v [4].

Točka P natančno določa krožnico $\mathcal{K}$ in hiperbolo $\mathcal{H}$ ter njuni presečišči P in Q. Poševnokotna koordinata η točke Q je tudi koren enačbe ($\star\star$), zato je koodinata $\xi = ef/\eta$ koren enačbe ($\star$), kar pa pomeni, da je $z'(\xi) = 0$ in premica skozi ustrezni točki A in B je Filonova.

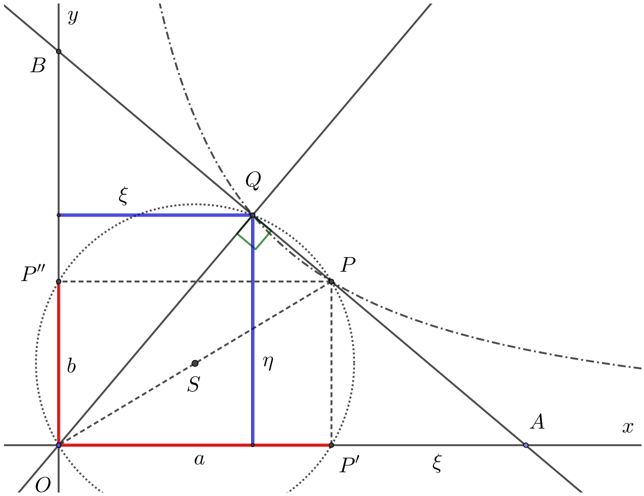
Filonova premica za pravi kot

Za pravi kot se računi poenostavijo. Tedaj je $a = e$ in $b = f$, enačbi ($\star$) in ($\star\star$) za ξ in η se poenostavita v $u^3 = ab^2$, $v^3 = a^2b$, ki imata rešitvi $\xi = \sqrt[3]{ab^2}$ in $\eta = \sqrt[3]{a^2b}$. Za razdaljo med točkama A in B pa dobimo

$$|AB| = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

Enačbi krožnice $\mathcal{K}$ in hiperbole $\mathcal{H}$ se poenostavita v

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0, \quad xy = ab.$$



Slika 7. Primer Filonove premice za pravi kot.

Relevantne točke s koordinatami so:

$$A(a+\xi,0),\ \ B(0,b+\eta),\ \ P(a,b),\ \ Q(\xi,\eta),\ \ S(a/2,b/2).$$

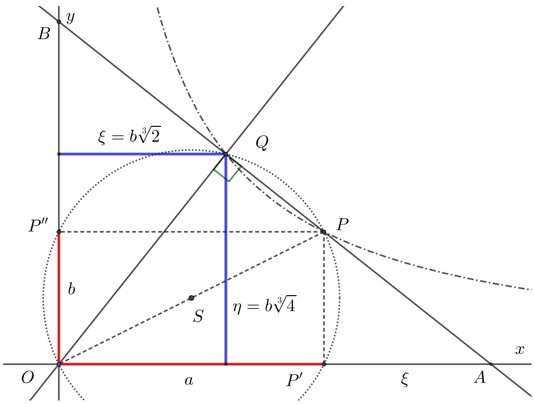
Po višinskem izreku v pravokotnem trikotniku OAQ velja relacija $\eta^2 = \xi a$ oziroma $a/\eta = \eta/\xi$. Zaradi podobnosti trikotnikov $P'AP$ in $P''PB$ dobimo še relacijo $\xi/b = a/\eta$. To lahko potrdimo tudi z izrazoma za ξ in η. Našli smo relacijo

$$\frac{a}{\eta} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\xi}{b}.$$

Pravimo, da sta ξ in η *srednji geometrijski sorazmernici* dolžin a in b. Ker ξ in η zadoščata enačbama $y^2 = ax$ in $x^2 = by$, lahko srednji geometrijski sorazmernici poiščemo tudi s presekom parabol $y^2 = ax$ in $x^2 = by$. Tako metodo so poznali že nekateri starogrški matematiki (več o tem najdemo na primer v [3]).

Za $a = 2b$ je $\xi = b\sqrt[3]{2}$, kar pomeni, da ima kocka z robom ξ za prostornino dvakratnik prostornine kocke z robom b. Takrat abscisa presečišča $Q \neq P$ krožnice $x^2 + y^2 - 2bx - by = 0$ in hiperbole $xy = 2b^2$ reši star antični problem podvojitve kocke.

Filon iz Bizanca, ki še ni poznal analitične geometrije, je problem reševal tako, da je načrtal pravokotnik $OP'PP''$, mu očrtal krožnico, podaljšal stranici OP' in OP'' prek P' in P'' (tako kot na sliki 8), nato pa je premico vrtel okoli P malo v eno, malo v drugo smer, da je dosegel enakost



Slika 8. Podvojitev kocke.

$|AP| = |QB|$ oziroma se ji dovolj natančno približal. Pri tem sta A in B presečišči podaljškov s to premico, Q pa njeno presečišče s krožnico. Če je $|P'P|$ rob kocke, potem je $|P'A|$ rob podvojene kocke (v grščini in nemščini, sicer z drugačnimi oznakami, je to razloženo v [2]).

Za konec

S Filonovo premico rešimo problem plavajoče letvice v kanalih iz uvoda tega prispevka. S širinama a in b kanalov in za kot $\vartheta = \max(\varphi, \pi - \varphi)$ zapišemo enačbo $(\star')$, poiščemo njeno pozitivno rešitev ζ in nazadnje izračunamo iskano dolžino letvice po formuli v $(\star\star\star')$.

Problem je znan tudi pod drugimi imeni, na primer problem najdaljše cevi, ki jo lahko nesemo iz enega hodnika v drugega, ali problem najkrajše lestve, ki jo lahko prislonimo na zid, pred katerim je ovira, na primer omara.

LITERATURA

[1] I. Asimov, *Biografska enciklopedija znanosti in tehnike*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1978.

[2] H. Diels in E. Schramm, *Philons Belopoiika: viertes Buch der Mechanik*, Verlag der Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1919.

[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. I, Dover Publications, New York, 1981.

[4] M. Razpet in N. Razpet, *Trikotnik, enakoosna hiperbola in Bernoullijeva lemniskata*, Obzornik mat. fiz. **66** (2019), 41–53.

[5] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg in drugje, 2012.

POSPLOŠITVE STIRLINGOVIH ŠTEVIL 1. VRSTE

ALEKS ŽIGON TANKOSIČ

Gimnazija Nova Gorica

Math. Subj. Class. (2020): 05A05, 05A10, 05A18, 05A19, 05A20

Rešitev za klasičen permutacijski problem posedanja n ljudi za k okroglih miz podajajo Stirlingova števila 1. vrste. V zadnjem stoletju pa so se razvile razne posplošitve teh števil, ki posplošujejo ta problem in k problemu dodajajo razne omejitve. Posplošitve v grobem delimo na uporabne in teoretične. V članku si ogledamo štiri verjetno najbolj znane posplošitve vse od predznačenih do (l, r)-Stirlingovih števil.

GENERALIZATIONS OF THE STIRLING NUMBERS OF THE 1ST KIND

The solution for the classical permutation problem of seating n people around k round tables is given by the Stirling numbers of the 1st kind. In the last century, however, various generalizations of these numbers have been developed, which generalize this problem and add various restrictions to the problem. Generalizations are roughly divided into practical and theoretical. In this article, we look at four of the probably most well-known generalizations, from the signed to the (l, r)-Stirling numbers.

Uvod

Kombinatorika je obsežno področje matematike, ki se ukvarja s konstrukcijo, lastnostmi in številom (praviloma) končnih matematičnih struktur. Kombinatorika se deli na vsaj 16 podpodročij, povezuje pa se še z vsaj petimi drugimi področji matematike in tudi fizike. Stirlingova števila 1. vrste, ki jih obravnavamo v tem članku, sodijo v *preštevalno kombinatoriko*, ki proučuje načine preštevanja elementov dane končne množice struktur in lastnosti števil, ki jih pri tem dobimo. Zelo zanimive knjige o preštevalni kombinatoriki so [4, 10, 11].

Koliko različnih možnosti imamo, da razporedimo n učencev okoli ene okrogle mize? Pri tem štejemo dve razporeditvi za enaki, če ima vsak učenec v obeh razporeditveh istega desnega soseda.

Najprej razporedimo učence v ravno vrsto, kar gre na $n!$ načinov, nato jih v dobljenem vrstnem redu posedemo za mizo. Če nastalo razporeditev zavrtimo za 0 ali 1 ali … ali $n-1$ sedežev, se desni sosedje ne spremenijo, torej je teh n razporeditev med seboj enakih. Število različnih razporeditev n učencev okoli okrogle mize je torej enako $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Stirlingova števila 1. vrste ta problem posplošujejo na večje število miz. Lahko jih definiramo na več načinov (glej [8, 9]).

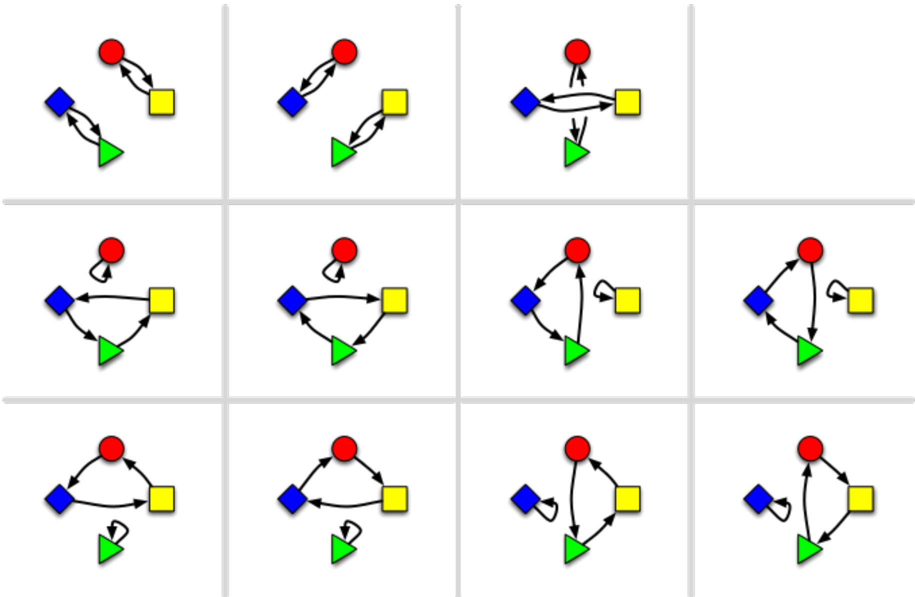
Definicija 1 ([10]). . Stirlingova števila 1. vrste, označimo jih z oglatim oklepajem $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, s $c(n, k)$ ali pa s $S_1(n, k)$, so števila permutacij velikosti n s k cikli.

Opomba 2. Stirlingova števila 1. vrste so med drugim tudi:

- koeficienti v razvoju rastočih potenc ($x^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$) po navadnih,

$$\alpha^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k,$$

- vsote vseh možnih produktov $n - k$ elementov iz množice $[n - 1]$.



Slika 1. Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tukaj liki različnih barv predstavljajo števila od 1 do 4. Vir: Wikipedia.

Primer 3. Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ta zapis predstavlja število vseh permutacij velikosti 4 oz. množice $[4]$ z natanko dvema cikloma. Poiščemo permutacije velikosti 4, ki so produkt natanko dveh ciklov. Obstajajo tri permutacije z dvema cikloma velikosti 2: (12)(34), (13)(24), (14)(23). Obstaja pa še osem permutacij velikosti 4 z dvema cikloma, pri čemer je prvi cikel velikosti tri, drugi cikel pa velikosti ena: (124)(3), (142)(3), (134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1), (123)(4), (132)(4). Možnosti seštejemo: 8+3 = 11, torej je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$ (glej sliko 1).

Oglejmo si še izračun z razvoji potenc in vsotami produktov. Izpišemo vse razvoje in dobimo koeficiente, ki so Stirlingova števila 1. vrste:

$$\begin{aligned}\alpha^{\overline{4}} &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) = \\ &= (\alpha^2+\alpha)(\alpha^2+5\alpha+6) \\ &= \alpha^4 + \alpha^3 \\ &+ \quad 5\alpha^3 + 5\alpha^2 \\ &+ \quad 6\alpha^2 + 6\alpha \\ \hline \alpha^{\overline{4}} &= \alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha.\end{aligned}$$

Koeficienti si sledijo v zaporedju 1, 6, 11, 6, 1. Tretji koeficient predstavlja vrednost $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$, ker je koeficient pri α^2 enak 11, je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$.

Po vsotah produktov pa je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = 11$. ♢

Nekaj lastnosti Stirlingovih števil 1. vrste

Navedimo še nekaj lastnosti Stirlingovih števil 1. vrste (glej [6, 8, 9]).

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = 0, k > n \ \ \vee \ \ k < 0$$

$$\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-3 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}\binom{n}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n,0}$$

Ker je $0^0 = 1$ in prav tako tudi $x^0 = 1$, $0^{\overline{0}} = 1$, $x^{\overline{0}} = 1$, $0^{\underline{0}} = 1$ in $x^{\underline{0}} = 1$, sledi, da je

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Znano je, da za Stirlingova števila 1. vrste velja rekurzija (glej [6]):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Omenimo še, da Stirlingova števila 1. vrste lahko definiramo tudi kot matriko, pri kateri s pomočjo dveh stolpcev zapišemo rastoče produkte (glej [3]).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}$$

Naša prva posplošitev Stirlingovih števil 1. vrste, ki jo bomo obravnavali, temelji ravno na inverzih Stirlingovih matrik.

Omenimo še Stirlingova števila 2. vrste, ki so števila vseh razdelitev množice $[n]$ na k nepraznih, paroma disjunktnih, neurejenih množic $B_1, B_2, \ldots, B_k$, imenovanih *bloki*, katerih unija je A. Stirlingova števila 2. vrste označimo z

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

ali s $S(n,k)$. Stirlingova števila 2. vrste imajo pri posplošitvah veliko povezav s Stirlingovimi števili 1. vrste.

Predznačena Stirlingova števila 1. vrste

Vrednosti predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste najdemo v inverzni Stirlingovi matriki 1. vrste. Znano je, da so nekatere vrednosti negativne [4].

Definicija 4. Predznačeno Stirlingovo število 1. vrste je:

$$s(n,k) = (-1)^{n+k} \left[{n \atop k} \right].$$

Očitno je, da velja

$$\left[{n \atop k} \right] = |s(n,k)|.$$

Iz Stirlingove matrike 1. vrste s pomočjo rastočih in padajočih potenc izpeljemo inverzno Stirlingovo matriko. Oglejmo si primer:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 25 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 31 & -90 & 65 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -63 & 301 & -350 & 140 & -21 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 127 & -966 & 1701 & -1050 & 266 & -28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix}$$

V inverzni Stirlingovi matriki 2. vrste dobimo enake vrednosti kot pri Stirlingovi matriki 1. vrste, le da so nekatere vrednosti negativne. Vrednosti pa so, kot lahko ugotovimo, negativne po diagonalah. Padajočo potenco, ki se nahaja v tej matriki, računamo po formuli: $x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 273 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & -1764 & 1624 & -753 & 175 & -21 & 1 & 0 \\ 0 & -5040 & -13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix}$$

Dobljena matrika je Stirlingova matrika 2. vrste in v njej najdemo vrednosti števil $\left\{ n \atop k \right\}$. Prvotna matrika pa je matrika predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste. Inverzi dokazujejo povezanost Stirlingovih števil obeh vrst.

Primer 5. Za zgled potencirajmo α^5. Po matriki bo

$$\alpha^5 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \alpha + 15 \cdot \alpha^{\underline{2}} + 25 \cdot \alpha^{\underline{3}} + 10 \cdot \alpha^{\underline{4}} + 1 \cdot \alpha^{\underline{5}}.$$

$\diamondsuit$

Oglejmo si še inverzno relacijo med razvoji potenc in predznačenimi Stirlingovimi števili 1. vrste, ki izhaja iz inverznih Stirlingovih matrik.

Izrek 6 ([8]). *Če α zamenjamo z $-\alpha$ in namesto Stirlingovega števila 1. vrste vstavimo predznačeno Stirlingovo število 1. vrste, dobimo*

$$\alpha^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k.$$

Stirlingova števila 1. vrste z negativnimi argumenti

Negativna cela števila se v Stirlingovem številu lahko nahajajo le, ko sta n in k negativni števili, ali ko je n negativno celo število, k pa pozitivno celo število. V preštevalni kombinatoriki nikoli ne uporabimo kombinacije, ko je n pozitivno celo število, k pa negativno celo število. Tukaj bomo spoznali zelo tesno povezavo med Stirlingovimi števili 1. in 2. vrste [1, 7].

Števili n in k sta negativni

Definicija 7. Za $n, k \in \mathbb{Z}^-$ in $k \leq n$ velja

$$\begin{bmatrix} -k \\ -n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix}.$$

S pomočjo prejšnje definicije lahko skonstruiramo tabelo 1 za Stirlingovo število 1. vrste, ko sta n in k negativni celi števili (glej [1]).

Število n mora biti po absolutni vrednosti manjše od k, če želimo dobiti vrednost večjo od 0.

Primer 8. Izračunajmo Stirlingovi števili:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

$n\|k$	-1	-2	-3	-4	-5
-1	1	1	1	1	1
-2	0	1	3	7	15
-3	0	0	1	6	25
-4	0	0	0	1	10
-5	0	0	0	0	1

Tabela 1. Vrednosti Stirlingovih števil 1. vrste z negativnimi argumenti za $-1 \geq n$, $k \geq -5$.

Po definiciji je:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \end{Bmatrix}.$$

Dobimo rezultata 0 in 350 (vrednost lahko preberemo iz Stirlingove matrike 2. vrste). ♢

Število n je negativno, k pa pozitivno

Oglejmo si rekurzijo, ki sledi iz eksplicitne formule za Stirlingova števila 2. vrste (glej [6]).

Izrek 9 ([1]). *Za izračun vrednosti pri $n \in \mathbb{Z}^-$ in $k \in \mathbb{N}$ velja naslednja rekurzivna zveza*

$$\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^k} \binom{n}{i}.$$

Primer 10. Sedaj pa si oglejmo zgled uporabe rekurzivne zveze. Izračunajmo

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{120}\left(5 - \frac{10}{2^3} + \frac{10}{3^3} - \frac{5}{4^3} + \frac{1}{5^3}\right) = \frac{1}{120}\left(5 - \frac{10}{8} + \frac{10}{27} - \frac{5}{64} + \frac{1}{125}\right).$$

Ko izračunamo vrednost izraza, dobimo $\frac{874863}{25920000}$. ♢

Ko skonstruiramo tabelo 2, se lahko hitro prepričamo, da za liha negativna števila dobimo pozitivne vrednosti.

Bellovo število je število vseh neurejenih razdelitev množice $[n]$ in je definirano z naslednjo vsoto

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

$n\|k$	0	1	2	3	4
-1	1	1	1	1	1
-2	$-\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{31}{32}$
-3	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{85}{216}$	$\frac{575}{1296}$	$\frac{3661}{7776}$
-4	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{25}{288}$	$-\frac{415}{3456}$	$-\frac{5845}{41472}$	$-\frac{76111}{497664}$
-5	$\frac{1}{120}$	$\frac{137}{7200}$	$\frac{12019}{432000}$	$\frac{874853}{25920000}$	$\frac{58067611}{1555200000}$

Tabela 2. Vrednosti Stirlingovih števil 1. vrste z negativnimi argumenti za $-1 \geq n,\, k \leq 4$.

Ni težko opaziti, da po prejšnji enačbi velja (glej [1])

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(k)$$

in

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = B(-k),$$

kjer je $B(k)$ Bellovo število z naravnim številom in $B(-k)$ Bellovo število z negativnim celim številom. Če pa je tudi k negativno celo število, dobimo

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(n).$$

Primer 11.

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = B(-2) \approx 0{,}421$$

$\diamondsuit$

Zelo zanimivo povezavo s padajočimi potencami imajo Stirlingova števila 1. vrste, ko je n negativno celo število in ko je k pozitivno celo število (izpeljano po definiciji v [1]): za $n \geq 0$ je

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} \alpha^{k}.$$

Podobno velja tudi trditev, ko sta n in k negativni celi števili (izpeljano po definiciji v [1]): za $n \geq 0$ je

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \alpha^{-k}.$$

r-Stirlingova števila 1. vrste

Broder je leta 1982 vpeljal r-Stirlingova števila obeh vrst [2].

Definicija 12. r-Stirlingova števila 1. vrste so števila permutacij množice $[n]$ s k cikli tako, da so števila $1, 2, 3, \ldots, r$ v različnih ciklih. Označimo jih z

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r .$$

Primer 13. Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$. Zanima nas, koliko permutacij množice $[4]$ ima natanko 2 cikla, tako da števili 1 in 2 nista v istem ciklu. Možnosti je 6, saj so možni cikli (134)(2), (143)(2), (243)(1), (234)(1), (13)(24), (14)(23). Za grafični prikaz glej sliko 2.

Oglejmo si še primer uporabe definicije iz vsakdanjika. Recimo, da so v učilnici 4 učenci. Na koliko različnih načinov jih lahko posedemo okrog dveh okroglih miz, če učenec 1 ne sme sedeti za isto mizo kot učenec 2?

Rešitev je dano r-Stirlingovo število 1. vrste $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$. Hitro se lahko prepričamo, da lahko to storimo na 6 načinov. ♢

Trditev 14 ([2]). *Vrednosti 0-Stirlingovih in 1-Stirlingovih števil 1. vrste so enake vrednostim Stirlingovih števil 1. vrste: za $n > 0$ velja*

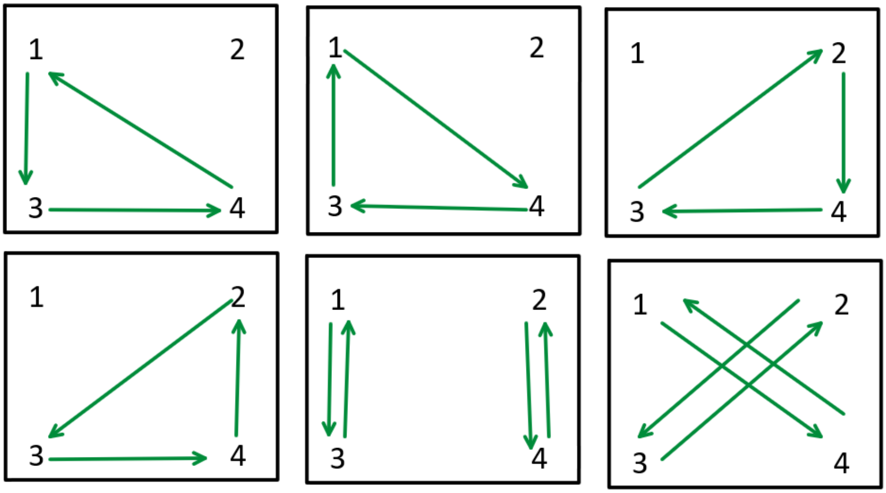
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Izrek 15 ([2]). *Za r-Stirlingova števila 1. vrste velja trikotniška rekurzija:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0, && \text{za } n < r; \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{kr}, && \text{za } n = r; \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r, && \text{za } n > r.
\end{aligned}$$

Izrek 16 ([2]). *Za $n \geq r > 1$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r \right).$$



Slika 2. Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$.

Dokaz. Ekvivalenten zapis je:

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r .$$

Desna stran šteje število permutacij s $k-1$ cikli, pri katerih so števila $1, \dots, r-1$ nosilci ciklov (tj. najmanjši elementi ciklov), medtem ko število r ni nosilec cikla. Možnosti je potemtakem

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r ,$$

saj lahko take permutacije pridobimo na $r-1$ načinov iz permutacij s k cikli, kjer so števila $1, \dots, r$ nosilci ciklov, z dodajanjem tistega cikla, ki vsebuje število r, na konec nekega cikla z manjšim nosilcem. $\square$

S pomočjo prejšnjih rekurzij in lastnosti lahko skonstruiramo tabele vrednosti za r-Stirlingova števila 1. vrste (glej tabeli 3 in 4). S pomočjo prejšnjih trditev pa lahko pokažemo, da so vrednosti pri $r = 0$ oz. $r = 1$ enake vrednostim Stirlingovih števil 1. vrste.

$n \mid k$	2	3	4	5	6	7
2	1	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0
4	6	5	1	0	0	0
5	24	26	9	1	0	0
6	120	154	71	14	1	0
7	720	1044	570	155	20	1

Tabela 3. Vrednosti 2-Stirlingovih števil 1. vrste za $2 \leq n,\ k \leq 7$.

$n \mid k$	3	4	5	6	7	8
3	1	0	0	0	0	0
4	3	1	0	0	0	0
5	12	7	1	0	0	0
6	60	47	12	1	0	0
7	360	342	119	18	1	0
8	2520	2754	1175	245	25	1

Tabela 4. Vrednosti 3-Stirlingovih števil 1. vrste za $3 \leq n,\ k \leq 8$.

(l, r)-Stirlingova števila 1. vrste

Leta 2021 sta Belbachir in Djemmada [5] definirala (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste in predstavila njihovo kombinatorično interpretacijo. Analogno definicijo (l, r)-Lahovih števil najdemo v [12].

Preden ta števila definiramo, omenimo še množico nosilcev ciklov. Naj bo λ permutacija množice $[n]$ z natanko k cikli $c_1, c_2, \ldots, c_k$. *Množico nosilcev ciklov* označimo s $\mathrm{cl}(\lambda)$ in je množica najmanjših elementov ciklov te permutacije:

$$\mathrm{cl}(\lambda) = \{\min c_1, \min c_2, \ldots, \min c_k\}$$

Definicija 17. (l, r)-Stirlingova števila 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ štejejo število končnih urejenih naborov l permutacij $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l)$ množice $[n]$ z natanko k cikli, kjer so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci ciklov in velja

$$\mathrm{cl}(\sigma_1) = \mathrm{cl}(\sigma_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\sigma_l).$$

Očitno je, da velja: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = 0$ *za* $n < r$ in $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \delta_{k,r}$ *za* $n = r$.

Izrek 18 ([5]). *Za $n > r$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = (n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}.$$

Dokaz. Nabor l permutacij množice $[n]$ pod pogojem, da so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci ciklov, lahko dobimo:

- z vstavljanjem n-tega elementa za vsak element v vsaki permutaciji nabora $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ permutacij množice $[n-1]$ z natanko k cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r$ prvi elementi v različnih ciklih in za katere velja $\mathrm{cl}(\lambda_1) = \mathrm{cl}(\lambda_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\lambda_l)$, za kar je $(n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti;
- tako, da n-ti element tvori cikel v vsaki od permutacij nabora $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, preostalih $[n-1]$ elementov pa mora biti razporejenih v $(k-1)$ ciklih pod prejšnjimi pogoji, za kar obstaja $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti. $\square$

Izrek 19 ([5]). *Za $n \geq r > 1$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \frac{1}{(r-1)^l} \left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)} \right).$$

Dokaz. Preštejmo število naborov permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ z natanko $(k-1)$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r-1$ nosilci cikla, število r pa ni, za katere velja pogoj $\mathrm{cl}(\lambda_1) = \mathrm{cl}(\lambda_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\lambda_l)$. Možnosti lahko preštejemo na dva načina.

- Preštejemo nabore permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ s $(k-1)$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r-1$ nosilci cikla in od teh odštejemo nabore permutacij, pri katerih je r nosilec cikla. Tako dobimo:

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}.$$

- Lahko pa preštejemo nabore permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ s k cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci cikla, kjer nato dodamo cikel z nosilcem r na konec nekega cikla z manjšim nosilcem. Za to imamo $(r-1)$ možnosti v vsaki permutaciji. Tako dobimo:

$$(r-1)^l \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}. \qquad \square$$

Posledica 20 ([5]). *Za $n \geq r$ in $k = r$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_r^{(l)} = (r^{\overline{n-r}})^l.$$

Zahvala

Najlepša hvala prof. dr. Marku Petkovšku za neprecenjive nasvete in podporo. Najlepša hvala mojim staršem za podporo in spodbude. Najlepša hvala prof. dr. Matjažu Konvalinki za nasvet pri urejanju članka. Najlepša hvala tudi anonimni recenzentki za natančen pregled in nasvete.

LITERATURA

[1] D. Branson, *An extension of Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **34** (1996), 213–223.

[2] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241–259.

[3] G.-S. Cheon in J.-S. Kim, *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **329** (2001), 49–59.

[4] Ö. Eğecioğlu in A. M. Garsia, *Lessons in enumerative combinatorics*, Grad. Texts in Math. **290**, Springer, Cham, 2021.

[5] H. Belbachir in Y. Djemmada, *The (l, r)-Stirling numbers: a combinatorial approach*, Filomat **37** (2023), 2587–2591.

[6] M. Konvalinka in P. Potočnik, *Diskretna matematika I*, Učbeniki – matematika **1**, Fakulteta za matematiko in fiziko UL, Ljubljana, 2019.

[7] D. E. Loeb, *A generalization of the Stirling numbers*, Discrete Math. **103** (1992), 259–269.

[8] M. Petkovšek in T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, Pi Mu Epsilon J. **12** (2007), 417–424.

[9] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The Lah identity and the Argonauts*, Pi Mu Epsilon J. **11** (2002), 385–386.

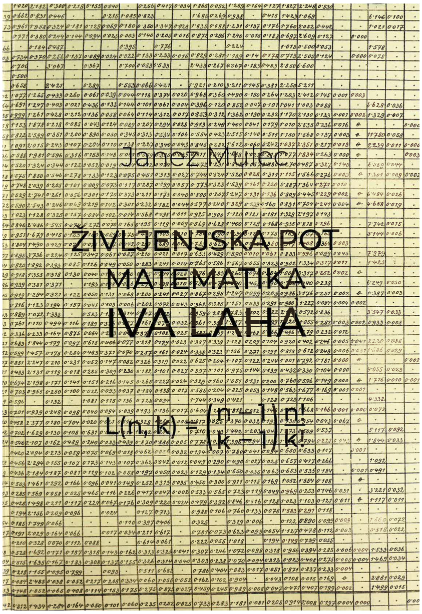
[10] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Stud. Adv. Math. **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[11] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.

[12] A. Žigon Tankosič, *The (l, r)-Lah Numbers*, J. Integer Seq. **26** (2023), Art. 23.2.6, 16 str.

NOVE KNJIGE

Janez Mulec, Življenjska pot matematika Iva Laha[1], samozaložba, 2023, 177 str.



Vsakdo ima v svoji omari kakšen skrit predalček, ki se ga boji odpreti, da ne bi iz njega pogledali okostnjaki preteklosti. To velja tudi za Slovence kot narod, za Slovenijo kot državo, pa tudi za vse bivše države, ki smo jim Slovenci, še ne tako daleč v preteklosti, pripadali.

Vse prerado pa se zgodi, da tistih skritih predalčkov nikoli ne odpremo. Pri posameznikih je razlog v grozi, ki nas prevzema ob misli, da bi obudili že davno pokopane nepopravljive grehe, ki smo jih zagrešili sami ali pa naši predniki. Pri zanikanju skupinskega zgodovinskega spomina pa obstajata predvsem dva poglavitna razloga. Po vsaki vojni, po vsaki bitki, po vsakih volitvah zmagovita stran piše zgodovino na novo. Pri tem skrbi včasih s posebnimi propagandnimi službami, da skriti predalčki ostajajo skriti in da vrata vanje ostanejo trdno zaprta. Drugi, še veliko hujši problem pa je, da ima vsaka omara, vsak spomin, omejen vek trajanja. Ko omara preperi in razpade, je vsebina skritega predalčka za vse večne čase izgubljena.

Pričujoča knjiga pa pred pozabo ohranja pomembna dejstva. Predstavlja zagozdo, ki za vedno ohranja odprta vrata enega od skritih predalčkov slovenske zgodovine ter zgodovine slovenske znanosti in matematike. Prikazuje namreč z dokumenti podprto življenjsko zgodbo po krivici zapostavljenega slovenskega razumnika Iva Laha (5. 9. 1896–23. 3. 1979).

Avtor knjige je bil od mladosti povezan z Ivom Lahom in Lahovimi. Je njegov daljni sorodnik (njegova stara mama je bila Ivova sestrična). Oba izhajata iz istih krajev (Štrukljeva vas, kjer se je rodil Ivo Lah, je le 13 kilometrov oddaljena od Cerknice, kjer je prebival Janez Mulec). Mulec je Laha

[1] Malo pred Božičem sem prejel v dar izvod te knjige, ki je izšla v samozaložbi v 100 izvodih. Dne 28. 12. 2023, le nekaj dni po njenem izidu, so njenega avtorja, Janeza Mulca, pokopali.

poznal vse do njegove smrti, skoraj 40 let. To daje knjigi še poseben osebni pečat, kar pa prav nič ne zmanjšuje njene objektivnosti in verodostojnosti.

Knjiga namreč prinaša iz Lahove osebne zapuščine številne dokumente, fotografije, zapiske itd., ki jih lahko vsak bralec interpretira po svoje. Razkritja daleč presegajo pomen separatov Lahovih strokovnih in znanstvenih del, ki jih je še za časa življenja zapustil Narodni in univerzitetni knjižnici.

Nekaj izvemo tudi o očetu Iva Laha oziroma o tem, kako ga je videl Ivo. Po njem je namreč podedoval veselje do računanja, po drugi strani pa je prek njega vsrkaval notranjsko praktično praznoverje. Ivov oče je bil eden zadnjih mož daleč naokoli, ki je znal zdraviti živino z zagovarjanjem. Zdravljenje s praznoverjem je bilo za revne kmete privlačnejše od zdravljenja z vero. Namesto 20 soldov, ki jih je računal Ivov oče za zagovarjanje, bi bilo župnikovo zdravljenje s sveto mašo v farni cerkvi bistveno dražje. V svojem daljšem spisu »Zagovarjanje (resnični dogodek)« Ivo na hudomušen način razloži razliko med liberalci in klerikalci, ko kot fantič med odgovori na župnikovo vprašanje »Kateri so grehi zoper vero?« našteva med drugim »Če se kdo k liberalcem zapiše ... če kdo ... zagovarja ...«. Pojasni tudi materino veliko bojazen, da ne bi bila zveličana, ker je prvi otrok prezgodaj privekal na svet in je videla edino zagotovilo za odrešenje, če bi kateri od obeh sinov pel novo mašo. Zato je podprla župnikovo priporočilo, naj nadarjenega Iva pošljejo šolat v Ljubljano, čeprav pri hiši ni bilo veliko denarja. Pa se ji želja ni uresničila niti pri Ivu niti pri njegovem mlajšem bratu Jožetu, ki je leta 1945 skupaj s svojim osemnajstletnim sinom po vrnitvi iz Vetrinj umrl v taborišču Teharje.

Po končani srednji šoli v Ljubljani je Ivo Lah leta 1915 vstopil v šolo za častnike avstro-ogrske vojske kot enoletni prostovoljec. Zaradi vojne in povojnih dogodkov je ostal v uniformi kar štiri leta. Mulčeva knjiga odkriva fotografije vojaka, častnika Iva Laha, najprej iz Neumarkta na Južnem Tirolskem, potem pa iz zaledja soške fronte. Lah je med vojno prebolel trebušni tifus. Po vojni pa se je pridružil Malgajevim borcem za severno mejo.

Patriotizem, ki ga je Ivo Lah izkazal v štirih letih v bojih v vojaški uniformi, mu ni prinesel odrešitve, niti na nacionalni niti na osebni ravni. Slovenija je izpod nadvlade Dunaja prišla pod nadvlado Beograda. Za Laha in njegovo generacijo pa je to pomenilo, da je bil pripadnik vojske, ki je izgubila vojno. Izgubil pa je tudi štiri pomembna leta v svojem akademskem razvoju in je bil tako v bistveno slabšem položaju od študentov, ki so se uniformi izognili.

Zanimivo je, da se je po končani vojni odločil za študij na Univerzi v Zagrebu. Gotovo je imel tam boljše možnosti izpopolnjevanja v uporabni matematiki kot v Ljubljani, kjer je na univerzi Josip Plemelj dajal ton v oblikovanju odnosa matematikov do uporabe matematike zunaj naravoslovja.

Še preden je Lah leta 1925 diplomiral na filozofski fakulteti iz matematike, je na Kraljevi visoki šoli za trgovino in promet leta 1923 opravil državni izpit in bil prav tam eno leto asistent iz matematike. Čeprav je kasneje večkrat predaval na univerzi, je svoje poslanstvo videl zunaj akademske sfere.

Lahov pristop k matematiki je bil podoben pristopu Jurija Vege in nasproten Plemljevemu. Medtem ko je Plemelj videl odlike matematike predvsem v njeni globini in čistosti, ki je doumljiva le najboljšim in najsposobnejšim matematikom, navadnim smrtnikom pa je popolnoma nedosegljiva, sta videla Vega in Lah matematiko predvsem kot sredstvo za razumevanje in izboljševanje pojavov realnega sveta in sta se brez kakšnih manjvrednostnih kompleksov lotila ustvarjanja matematike. In tudi ona dva sta se zapisala s svojim delom v zgodovino svetovne matematike. Seveda pa je tudi med njima velika razlika. Medtem ko je Vega izhajal iz izboljševanja vsega, kar je bilo povezano s topništvom, od zlaganja krogel v kopice do balistike ter priročnikov za hitro računanje, pa je Laha zanimala uporaba matematike pri družbenih podsistemih, v ekonomiji, demografiji, statistiki, zavarovalništvu, aktuarstvu. Beseda »aktuar« je prišla v moj besednjak šele po slovenski osamosvojitvi, saj se je je pred tem držal, tako kot npr. besede »renta« ali besedne zveze »prostovoljno zavarovanje«, pridih zatohlega kapitalizma.

Med najpomembnejša Lahova dela lahko uvrstimo tri: eno predvojno, dve pa povojni.

1. Bil je eden izmed vodilnih pionirjev aktuarstva v Jugoslaviji. Aktivno se je udeleževal svetovnih aktuarskih kongresov. Doma pa je osnoval in štiri leta, do Hitlerjevega napada na Jugoslavijo, urejal revijo »Glasnik udruženja aktuara kraljevine Jugoslavije«. To je bila prva revija na teh prostorih, ki je objavljala članke iz aktuarstva, demografije, statistike in matematike.

2. Leta 1947 je izšla njegova trijezična knjiga »Računske osnovice životnog osiguranja« [5].

3. Leta 1954 je objavil mednarodno odmeven prispevek v angleščini [6], potem pa še v nemščini [7], v katerem je objavil koeficiente, ki povezujejo naraščajoče potence s padajočimi in so jih v svetovni literaturi poimenovali »Lahova števila«.

Zanimivo je, da noben od teh velikih Lahovih dosežkov pri pouku matematike v šoli ali na univerzi nikjer v Jugoslaviji ni bil omenjen, čeprav smo Lahova števila poznali in smo jih pri poučevanju kombinatorike tudi omenjali. Razumeti je treba, da je bila kombinatorika tudi kasneje dolgo časa pri nas omalovaževana, zato se temu sprva nismo čudili. Nekega dne je k meni prišel pokojni kolega prof. Marko Petkovšek in mi pokazal stran v knjigi [3], kjer so avtorji pripisali odkritje Lahovih števil nekemu Ivu Lahu. Šele ko sva se prepričala, da je človek, po katerem se imenujejo Lahova števila, Slovenec in sem ob prelomu stoletja, deset let po osamosvojitvi ter vzpostavitvi demokratičnega sistema pri nas, stopil v stik z Lahovo hčerko Marijo, smo izvedeli za revijo »Glasnik« in za knjigo »Računske osnovice«.

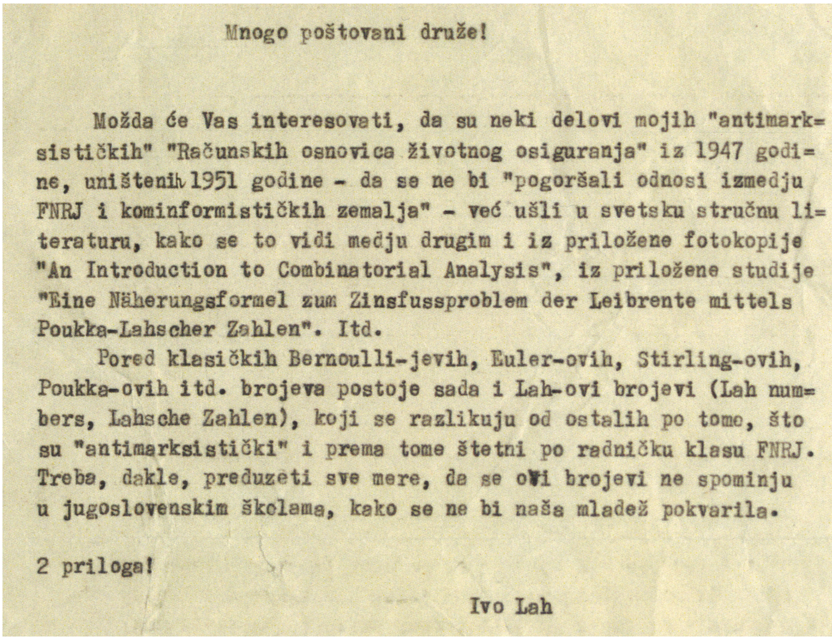
»Glasnik« bi se moral zapisati v zgodovino slovenske matematike, saj za 12 let prehiteva Obzornik za matematiko in fiziko, ki je začel izhajati leta 1949. Resnici na ljubo je bil »Glasnik« glasilo društva aktuarjev, ki je vključevalo zelo specializirane matematike, ampak tedaj društva matematikov sploh še ni bilo. Zanimivo je, da je bil član društva aktuarjev srbski akademik, matematik Jovan Karamata, medtem ko v Sloveniji razen Laha ni bilo med aktuarji poklicnega matematika.

Mulčeva knjiga ne govori veliko o aktuarjih in »Glasniku«. Prinaša pa pomembne podatke, povezane z »Računskimi osnovicami«. Ivo Lah je bil namreč član državne delegacije, ki se je v Rimu pogajala z Italijo o vojnih reparacijah. Ni bil v prvi vrsti, ampak je v ozadju števila izračunal na osnovi podatkov iz »Osnovic«. Medtem ko so politiki argumentirali »na pamet«, jim je on dajal verodostojne, s števili podprte argumente za jugoslovanske zahteve. Namesto argumenta moči je uporabljal moč argumentov, ki jih je morala sprejeti tudi nasprotna stran. Tudi o tem nismo vedeli ničesar. Skoraj neverjetno je, da so njegovo knjigo »Osnovice« razglasili za protimarksistično in jo odpeljali na uničenje, čeprav je le nekaj let poprej prav ta knjiga pomagala komunistični oblasti. Po besedah njegove hčerke, naj bi bil razlog za to nesprejemljiv citat »Natura non facit saltus« (Narava ne dela skokov), ki naj bi zagovarjal evolucijo pred revolucijo.

Med pogovorom pred četrt stoletja mi je Marija Lah omenila, da se je nekoč njen oče pohvalil, da celo neka števila imenujejo po njem. Ni pa mi zaupala, da so tudi Lahova števila šteli za protimarksistična. O tem žalostnem dejstvu lahko preberemo v Mulčevi knjigi. Ivo Lah zapiše besede na sliki 1.

Ta osnutek oziroma kopijo dopisa nadrejenemu je Ivo Lah napisal verjetno leta 1961, vsekakor pa med koncem leta 1960 in pred aprilom leta 1963. Knjiga »An Introduction to Combinatorial Analysis« [10] je sicer izšla že dve leti prej. Članek »Eine Näherungsformel zum Zinsfussproblem der Leiberente mittels Poukka-Lahscher Zahlen« [2] je bil namreč objavljen oktobra 1960, aprila 1963 pa se je FNRJ preimenovala v SFRJ. Več kot petnajst let, potem ko so ga leta 1945 diskreditirali, je nad njim viselo prekletstvo »antimarksizma«.

Pa si oglejmo z matematične plati veličino Lahovega spoznanja. Lahova števila so namreč dragulj, ki je ležal stoletja neodkrit vsem na očeh, tudi



Mnogo poštovani druže!

Možda će Vas interesovati, da su neki delovi mojih "antimarksističkih" "Računskih osnovica životnog osiguranja" iz 1947 godine, uništenih 1951 godine - da se ne bi "pogoršali odnosi izmedju FNRJ i kominformističkih zemalja" - već ušli u svetsku stručnu literaturu, kako se to vidi medju drugim i iz priložene fotokopije "An Introduction to Combinatorial Analysis", iz priložene studije "Eine Näherungsformel zum Zinsfussproblem der Leibrente mittels Poukka-Lahscher Zahlen". Itd.

Pored klasičkih Bernoulli-jevih, Euler-ovih, Stirling-ovih, Poukka-ovih itd. brojeva postoje sada i Lah-ovi brojevi (Lah numbers, Lahsche Zahlen), koji se razlikuju od ostalih po tome, što su "antimarksistički" i prema tome štetni po radničku klasu FNRJ. Treba, dakle, preduzeti sve mere, da se ovi brojevi ne spominju u jugoslovenskim školama, kako se ne bi naša mladež pokvarila.

2 priloga!

Ivo Lah

Slika 1. Dokument je v knjigi objavljen na strani 63.

največjim svetovnim matematikom. Razlog, da je čakal na Laha, stoji v preprostem dejstvu, da ga »čisti« matematiki niso pričakovali, ker ga niso potrebovali. Ivo Lah pa je števila odkril, ker jih je potreboval, v zapostavljeni, aktuarski matematiki. Čudež Lahovih števil je v njihovi presenetljivi raznovrstni uporabnosti. Ko sem po Google Scholar poiskal prispevke, ki omenjajo »Lah number« sem dobil samo za leto 2023 kar 32 navedkov v revijah iz raznih vej matematike in drugih znanosti. Eno od takih interpretacij v klasični kombinatoriki sva našla in potrdila s pokojnim kolegom prof. Markom Petkovškom v dveh prispevkih [8, 9]. Prav globoka zasidranost Lahovih števil v kombinatoriki je razlog, da so ta števila in njihove posplošitve še dandanes predmet intenzivnega raziskovanja.

Ivo Lah pa je do svojih števil prišel tako, da je zapisal povezavo med naraščajočimi in padajočimi potencami, ki ji pravijo tudi Lahova identiteta.

V prostoru polinomov običajne potence $x^n, n = 0, 1, \ldots$ sestavljajo bazo. Znano je, da je zanimivih baz prostora polinomov več. Med njimi sta se pri Lahovih aktuarskih problemih pojavili bazi naraščajočih potenc $x^{(n)}$ in padajočih potenc $(x)_n$. Pri tem je:

$$x^{(n)} = x(x+1)\ldots(x+n-1),$$
$$(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Ivo Lah je dognal, da se pri izražanju ene baze z drugo pojavljajo posebna števila, ki se zdaj imenujejo Lahova števila. Zveza med naraščajočimi in običajnimi potencami je bila že znana. Tam se kot koeficienti pojavljajo Stirlingova števila prve vrste $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}$. Prav tako je bila znana zveza med običajnimi potencami in padajočimi potencami. Zveza so Stirlingova števila druge vrste $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}$. Lah pa je s svojimi števili in s svojo zvezo (identiteto) kompletiral trikotnik.

Omenimo še tri zanimivosti. Trikotnik na sliki ima svojevrstno simetrijo. Če ga prezrcalimo prek navpične višine, obrnemo puščice in zamenjamo Stirlingova števila prve vrste s Stirlingovimi števili druge vrste, preide sam vase. Jovan Karamata, ki je avtor omenjenih simbolov, je deloval tudi kot aktuar in sta se z Lahom poznala. V »Osnovicah« Ivo Lah citira aktuarja Roberta Fruchta [1], ki je takrat nekaj let deloval v Trstu, preden se je preselil v Valparaiso in postal znan kot eden izmed pionirjev algebrajske teorije grafov. Kako majhen je svet in še veliko manjši je svet matematike!

V Lahovi identiteti

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k} (x)_k$$

nastopajo nepredznačena Lahova števila

$$\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k} = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
& x^n \arrow[dl, bend right, "(-1)^{n-k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}"'] \arrow[dr, "\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}"] & \\
x^{(n)} \arrow[ur, "\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}"] \arrow[rr, "\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k}"] & & (x)_n \arrow[ul, bend right, "(-1)^{n-k}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}"'] \arrow[ll, bend left, "(-1)^{n-k}\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k}"]
\end{tikzcd}$$

Oznake za Stirlingova števila je vpeljal Jovan Karamata [4], midva s kolegom Petkovškom pa sva jih v obeh prispevkih v istem slogu razširila še na Lahova števila: $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$.

Stirlingova števila in obe zvezi je odkril že dvesto let prej škotski matematik James Stirling – Benečan, matematik z nenavadno razgibanim življenjem. Kot podpornik hiše Stuartov se je mladi Stirling umaknil v Benetke. Ko pa je tam odkril skrivnost benečanskega steklarstva, se je v strahu za življenje s pomočjo Isaaca Newtona vrnil v Anglijo. Benečani so razvili umetnost steklarstva že v antiki in so imeli stoletja monopol nad to pomembno gospodarsko panogo. Pri čuvanju skrivnosti muranskega steklarstva niso izbirali sredstev.

In Ivo Lah je zapolnil luknjo v znanju, ki je zijala vsem matematikom na očeh dobrih dvesto let. Njegova števila naj bi bila protimarksistična. Le ko pregledamo vsebino dokumentov v knjigi, lahko razumemo sistem, ki je privedel do takšnih absurdnih zaključkov. Stvar je bila zelo preprosta. Po koncu vojne so bili ljudje razdeljeni na »naše«, to je na pripadnike OF, in na »sovražnike«. Najhujše sovražnike je režim likvidiral. Malo manj hude sovražnike pa je »le« diskreditiral. Našel jih je s pomočjo špicljev, ki so bili primerno indoktrinirani in radikalizirani, pogosto pa so jih našli kar med »spreobrnjenimi sovražniki«, ki so si z lažnimi denunciacijami olajšali življenje in izboljšali prihodnost. Medtem ko so Ivovega brata in njegovega sina šli iskat v Avstrijo in so ju likvidirali, so Iva in njegovo ženo na podlagi anonimnih ovadb razglasili za sovražnika ljudstva in jima odvzeli volilno pravico. Ženo pa so celo za mesec dni (od 12. 5. do 10. 6. 1945) priprli. Zanimive so obtožbe, ki sta jih bila deležna. Lahovo ženo je nekdo obtožil, da naj bi med okupacijo imela doma Hitlerjevo sliko. Vsakemu študentu prava priporočam, da naj prebere pritožbe, ki sta jih pisala zakonca Lah. Ena od obtožb Ivove žene naj bi bilo dejstvo, da ni »prispevala k nabiralnim akcijam, katere zakonito organizirajo ljudske oblasti«. V pritožbi navaja, da je bila že pred vojno invalidsko upokojena, po vojni pa so ji odvzeli invalidsko rento, tako da ni imela sredstev, s katerimi bi »prispevala k nabiralnim akcijam«. Pripor in izguba volilne pravice sta povzročila, da so sosedje sovražno gledali na zakonca Lah.

Ta stigma je spremljala Iva Laha tudi na njegovi strokovni poti vse do smrti. Kot vrhunskega strokovnjaka ga je režim nujno potreboval. Tako je bil v letih 1949/50 del jugoslovanske delegacije pod vodstvom Jožeta Brileja, ki se je v Rimu pogajala o italijanskih reparacijah. Službeni kolegi pa so o njem širili neresnične govorice in so ga na vsakem koraku onemogočali. Hoteli so mu celo preprečiti udeležbo na pogajanjih v Rimu, češ da bo ušel iz države. Iz ohranjenih dokumentov vidimo obupen boj pokončnega posameznika proti skorumpiranemu sistemu. Nekje zapiše, da ima sam več znanstvenih objav kot vsi tisoči uslužbencev Zveznega urada za statistiko in evidenco. Režim je potreboval rezultate njegovega dela, hkrati pa ga je zaničeval in uničeval kot človeka. Odrekal mu je pošteno plačo. Po uspehu pri pogajanjih v Rimu so ga premestili na drugo delovno mesto, s ciničnimi besedami, da za tako izjemnega strokovnjaka pri njih ni prostora. Kasneje so ga pahnili v pokoj z mizerno pokojnino, rekoč »da odžira kruh mlajšim«. Ta del knjige o Lahu je vreden še posebej pozornega branja. Niso bila torej sporna Lahova števila. Sporen je bil njih odkritelj, ki kljub strahovitim pritiskom in diskreditacijam ni želel spoznati znanstvenih prednosti marksizma.

Lah je v svojih ocenah, ki jih je pisal svojim nadrejenim, neizprosno objektiven. Jugoslavija bi lahko od okupatorjev iztržila veliko več. Model, ki ga je uporabil v pogajanjih z Italijani, bi se dalo brez truda uporabiti tudi pri Avstrijcih, Nemcih in Madžarih. Pa je prišlo leta 1952 do uničenja arhivov socialnega zavarovanja okupatorskih oblasti. Lah ugotavlja, da so državna podjetja, ki so skrbela za odpadni papir, sama spodbujala uničevanje arhivov. Papir so kupovala po 3 din na kilogram, naprej pa so ga prodajala za 17 din na kilogram in plačevala uslužbencem socialnega zavarovanja provizijo. Razlika v ceni je delovala kot magnet v skladu z doktrino, da ima v Jugoslaviji ideologija prednost pred ekonomijo. Druga spodbuda za uničevanje arhivov pa so bili ljudje, katerih podatki so bili zapisani v arhivih, saj so se bali, da jih bodo označevali za sodelavce okupatorja.

Veličina Iva Laha je v njegovi odkriti skrbi za izboljšavo življenjskih razmer delavstva in vlogi socialnega zavarovanja pri tem. Na to življenjsko temo je objavil številne prispevke pred vojno in med vojno. Po vojni pa je bila njegova zdravorazumska, ekonomska miselnost trn v peti in v ostrem nasprotju z revolucionarno miselnostjo nove oblasti.

Glede na to, da Lahovo delo presega okvire matematike, bi morali njegove spise poiskati in v celoti digitalizirati, kar pa zahteva veliko naporov in znanja, saj jih je izjemno veliko in žal niso vsi locirani v NUK-u. V eni svojih ohranjenih pritožb Ivo Lah omenja, da je v dnevnem časopisju po vsej Jugoslaviji objavil skoraj tisoč poljudnih prispevkov. Za financiranje takega projekta pa bi morala poskrbeti država.

Pa ne gre samo za Laha. Prav bi bilo, da bi javno rehabilitirali njega in vse podobne razumnike, ki so se znašli v kolesju revolucije in porevolucionarnih norosti. Žal pa stigma, ki je leta 1945 potiskala Iva Laha v anonimnost, učinkuje še dandanes. Žalostno je, da je tri desetletja po osamosvojitvi knjiga o življenjski poti Iva Laha morala iziti v samozaložbi in da naša država še vedno ne zmore odstraniti ideoloških plašnic ob pogledu na svojo zgodovino.

Zahvale:
Avtor je bil deležen podpore ARRS (raziskovalni program P1-0294 in raziskovalni projekti J1-1690, N1-0140, J1-2481). Zahvaljuje se recenzentom za skrbno branje, prof. Marku Razpetu pa še za pomoč pri oblikovanju v LaTeX-u.

LITERATURA

[1] R. Frucht, *Sulle relazioni che esistono fra due tipi di formule proposte per il calcolo approssimato delle rendite vitalizie*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari **7** (1936), 327–339.

[2] W. J. C. de Heer, *Eine Näherungsformel zum Zinsfußproblem der Leibrente mittels POUKKA-LAHscher Zahlen*, Blätter DGVFM **5** (1960), 101–104; dostopno tudi na `https://doi.org/10.1007/BF02809284`.

[3] R. L. Graham, D. E. Knuth in O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

[4] J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités rattachant*, Mathematica (Cluj) **9** (1935), 164–178.

[5] I. Lah, *Računske osnovice životnog osiguranja*, Državni zavod socialnog osiguranja, Zagreb, 1947.

[6] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletin do Instituto dos Actuarios Portugueses **9** (1954), 7–15.

[7] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsbl. Math. Statist. **7** (1955), 203–212.

[8] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The Lah identity and the Argonauts*, The ΠME Journal **11** (2002), 385–386.

[9] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, The ΠME Journal **12** (2007), 417–424.

[10] J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

Tomaž Pisanski

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Mednarodna matematična olimpijada (MMO) in umetna inteligenca

V zadnjem času sta v matematični skupnosti vseh, ki se ukvarjamo z matematičnimi tekmovanji, veliko pozornost pritegnili dve novici.

Najprej je 17. novembra 2023 podjetje XTX Markets, ki se ukvarja s trgovanjem na finančnih trgih, ustanovilo sklad v vrednosti 10 milijonov dolarjev in razpisalo Nagrado AIMO (Artificial Intelligence Mathematical Olympiad Prize, `https://aimoprize.com/`). Nagrada AIMO naj bi spodbudila razvoj modelov umetne inteligence za reševanje matematičnih problemov, pri čemer naj bi bili vsi koraki pri dokazovanju rešitve tudi razumljivo logično utemeljeni, kot je to običaj v obstoječi matematični literaturi. Natančneje, za prvi javno dostopni model umetne inteligence, ki bi osvojil zlato medaljo na MMO, je namenjenih 5 milijonov dolarjev, preostalih 5 milijonov dolarjev pa za pomembne vmesne dosežke na poti do končnega cilja. Za primerjavo, leta 2000 je Clay Mathematics Institute za rešitev vsakega od sedmih slavnih nerešenih matematičnih problemov ponudil nagrado v višini zgolj 1 milijon dolarjev (The Millennium Prize Problems). Od omenjenih sedmih milenijskih problemov je bil do danes rešen le eden, in sicer je Grigori Perelman leta 2002 dokazal Poincaréjevo domnevo. Za ta rezultat je bil nagrajen tako z nagrado Milenij kot tudi s Fieldsovo medaljo, a je obe nagradi zavrnil.

Druga odmevna novica je prišla 17. januarja 2024, ko je bil v reviji Nature, eni od dveh najprestižnejših znanstvenih revij, objavljen članek, v katerem avtorji predstavijo, kako so razvili model umetne inteligence AlphaGeometry. Ta model uspešno reši naloge s področja evklidske geometrije, ki so primerljive težavnosti, kot so naloge na MMO, rešitve pa so enostavno berljive tudi za ljudi (`https://www.nature.com/articles/s41586-023-06747-5`). Na testu je AlphaGeometry od 30 nalog, katerih težavnost je primerljiva z nalogami na MMO, uspešno rešil kar 25 nalog, našel je celo posplošeno rešitev naloge z MMO 2004. Če bi bile na MMO samo naloge s področja geometrije, bi AlphaGeometry najverjetneje že letos osvojil zlato medaljo.

Hitrost, s katero padajo mejniki pri razvoju umetne inteligence, je res neverjetna. Eden izmed prvih mejnikov je bil zagotovo leta 1997, ko je IBM-ov računalnik Deep Blue premagal svetovnega šahovskega prvaka Garija Kasparova. Skoraj 20 let je nato minilo, da je računalnik leta 2016 premagal človeka v še kompleksnejši strateški igri go, ki je veljala za velik izziv za umetno inteligenco. In čeprav se zdi, da je bilo to že davno, je minilo komaj malo več kot leto dni, odkar je ChatGPT šokiral vse. Tako posamezniki kot celotno človeštvo smo se začeli zavedati, da je umetna inteligenca postala inteligentna, in to ne samo v nekaterih posebnih situacijah, temveč tako rekoč povsod v vsakdanjem življenju. Umetna inteligenca je sposobna pisati krasne govore, seminarske naloge, dobro analizirati projekte in pisati računalniško kodo. In je daleč od tega, da bi bila slaba na področju umetnosti, pa naj bo to glasba ali slikarstvo ali pa filmski svet, kjer smo priča stavkam zaposlenih zaradi strahu, kako bo umetna inteligenca vplivala na njihove zaposlitve. Pri vsem omenjenem pa je vedno bolj izpostavljen velik problem, ker ne vemo, kaj nastaja kot plod umetne inteligence in koliko so rezultati umetne inteligence zanesljivi oziroma resnični.

Eno od področij, kjer je bilo še nedavno videti, da bo umetna inteligenca potrebovala malo več časa, da bo dosegla ali presegla sposobnosti človeškega uma, je bila matematika. Pri čemer tu niso mišljeni preprosti računski matematični problemi, temveč problemi z abstraktnimi koncepti, ki zahtevajo dolgo zaporedje konciznih logičnih sklepov najvišjih kognitivnih stopenj človeškega uma, kjer mora biti prav vsak korak rešitve utemeljen, tako da je na koncu povsem jasno, da je rezultat resničen. Že na prvi pogled gre za izjemno zahteven izziv za umetno inteligenco, zato ni presenetljivo, da si je več razvijalcev modelov umetne inteligence izbralo za vstop v svet bolj zahtevnih matematičnih problemov ravno naloge z MMO. Na MMO sodeluje več kot 600 tekmovalk in tekmovalcev iz več kot 100 držav, prav gotovo so vsi sodelujoči med najbistrejšimi umi v svoji generaciji iz svoje države. In od vseh teh sodelujočih jih vseh šest nalog na MMO vsako leto reši manj, kot je prstov na eni roki. Očitno so naloge na MMO izjemno težke, pa vendar za rešitev nobene naloge z MMO ni treba poznati univerzitetne matematike, nobenih integralov, diferencialnih enačb, matrik itd. Potrebujemo pa izjemno bistre ideje, abstraktno in občasno nekonvencionalno razmišljanje, natančno argumentiranje in jasno predstavitev rešitve. Zaradi vsega naštetega so naloge z MMO odlično okolje za učenje umetne inteligence na področju matematike in zdi se, da bo tudi MMO prispevala svoj majhen del k temu, da bo na področju matematike umetna inteligenca vedno večkrat premagala človeško. In to, upamo, da vsaj na področju matematike, na pregleden in zaupanja vreden način.

LITERATURA

[1] *AIMO prize*, dostopno na: `https://aimoprize.com/`, ogled 12. 2. 2024.

[2] T. H. Trinh, Y. Wu, Q. V. Le, H. He in T. Loung, *Solving olympiad geometry without human demonstrations*, Nature **625** (2024), 476–482, dostopno na: `https://www.nature.com/articles/s41586-023-06747-5`, ogled 12. 2. 2024.

[3] *International mathematical olympiad*, dostopno na: `https://www.imo-official.org/`, ogled 12. 2. 2024.

Gregor Dolinar

Vabilo na redni občni zbor DMFA Slovenije z volitvami (četrtek, 14. marca 2024)

Spoštovane članice in člani DMFA Slovenije. Vljudno vabljeni na redni občni zbor DMFA Slovenije, ki bo potekal v četrtek, 14. marca 2024 ob 18. uri na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Ob občnem zboru bo predvidoma potekal tudi spremljevalni program (vabljeno poljudno predavanje), natančnejše informacije bodo objavljene na spletni strani `www.dmfa.si` najkasneje do 7. 3. 2024. Predlog dnevnega reda občnega zbora je:

1. imenovanje delovnega predsedstva;
2. poročila o delu društva v letu 2023;
3. finančno poročilo 2023 in finančni načrt 2024;
4. pobude in predlogi članov*;
5. volitve predsednika/predsednice in članov Upravnega odbora, Nadzornega odbora in Častnega razsodišča DMFA Slovenije za mandatno obdobje od 1. 9. 2024 do 31. 8. 2026**;
6. razno.

* Pobude in predloge lahko člani in članice izrazite ustno na občnem zboru ali pa jih pošljite v pisni obliki na naslov `tajnik@dmfa.si` do 13. 3. 2024.
** Voljene funkcije v Upravnem odboru DMFA Slovenije so: predsednik društva, podpredsednik društva in tajnik društva, predsedniki znanstvenih odborov (Slovenski odbor za matematiko, Slovenski odbor za fiziko, Slovenski odbor za astronomijo), tajniki stalnih komisij DMFA Slovenije (za popularizacijo matematike v OŠ, za popularizacijo matematike v SŠ, za tekmovanje Mednarodni matematični kenguru, za popularizacijo fizike v OŠ, za popularizacijo fizike v SŠ, za popularizacijo astronomije, za pedagoško in založniško dejavnost, za informacijsko tehnologijo, za upravne in administrativne zadeve), ter predstavnika Odbora za ženske in Študentske sekcije DMFA Slovenije. Občni zbor izvoli tudi 3 člane Nadzornega odbora in 3 člane Častnega razsodišča.

Kandidati za voljene funkcije morajo biti članice oziroma člani DMFA Slovenije, predlaga jih lahko vsak član ali skupina članov DMFA Slovenije (s soglasjem kandidata). Za izpostavljene funkcije (predsednik društva in predsedniki odborov) se priporoča pisno izražena podpora večje skupine članov, ki delujejo na relevantnem področju. Predloge s kratko predstavitvijo in osebnimi podatki predlaganih kandidatov pošljite do 1. 3. 2024 na naslov `tajnik@dmfa.si`. Za dodatna pojasnila se obrnite na predsednika DMFA Slovenije, prof. dr. Primoža Potočnika, ali druge člane Upravnega odbora.

Boštjan Kuzman

Zoisove nagrade in priznanja za leto 2023

Novembra 2023 so bile podeljene nagrade in priznanja za izjemne dosežke v znanstvenoraziskovalni in razvojni dejavnosti. Zoisove nagrade in priznanja prejmejo raziskovalke in raziskovalci, ki so s svojimi dosežki trajno prispevali k razvoju znanstvenoraziskovalne in razvojne dejavnosti v Republiki Sloveniji. Puhove nagrade in priznanja prejmejo zaslužni za izume, tehnološke in netehnološke razvojne dosežke in uporabo znanstvenih izsledkov z vseh znanstvenih področij pri uvajanju novosti v gospodarsko in družbeno prakso. Ambasador znanosti Republike Slovenije se podeljuje za pomembne dosežke pri promociji in razvoju slovenske znanstvene in razvojne dejavnosti v tujini.

V letu 2023 sta bili podeljeni dve Zoisovi nagradi za življenjsko delo. Prvo nagrado je prejel Joso Vukman za življenjsko delo na področju matematike, drugo pa Danilo Zavrtanik za življenjsko delo na področju fizike in astrofizike osnovnih delcev.

Zoisove nagrade za vrhunske dosežke so prejeli Aleksey Kostenko na področju matematične analize, Igor Križaj na področju toksinologije, Igor Škrjanc na področju inteligentnih samorazvijajočih se sistemov ter Marko Snoj na področju slovenskega jezika.

Priznanje ambasadorka znanosti Republike Slovenije za krepitev ugleda slovenske astrofizike v družbi in v mednarodnem merilu je prejela Maruša Bradač.

Zoisova priznanja so prejeli Uroš Cvelbar za pomembne dosežke na področju plazemske fizike, Lucija Peterlin Mašič za pomembne dosežke na področju farmacevtske kemije in toksikologije, Matjaž Finšgar za pomembne dosežke na področju razvoja nekonvencionalnih orodij v analizni kemiji, Matej Černe za pomembne dosežke na področju raziskav vodenja kreativnega, inovativnega in digitalnega dela, Marjetka Podobnik za pomembne dosežke na področju strukturne biologije ter Irena Stramljič Breznik za pomembne dosežke na področju znanstvenoraziskovalnega dela in razvijanja inovativnih pristopov v jezikoslovju.

Med nagrajenci so tudi člani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije Joso Vukman, Danilo Zavrtanik in Maruša Bradač.

Joso Vukman je zaslužni profesor Univerze v Mariboru. Raziskovalno kariero je začel pod mentorstvom Ivana Vidava. Njegov raziskovalni opus obsega funkcionalno analizo, teorijo kolobarjev in funkcijskih enačb. Dokazal je karakterizacijo Hilbertovega prostora med vsemi normiranimi prostori. Drugi pomemben dosežek obravnava reprezentacijo kvadratnega funkcionala z bilinearnim funkcionalom. Njegove raziskave na področju funkcionalne analize so vodile v teorijo kolobarjev. Vplival je na razvoj teorije funkcijskih identitet, ki je ena izmed najpomembnejših teorij zadnjih trideset let v teoriji kolobarjev. Na njegovo pobudo so se na Univerzi v Mariboru oblikovala raziskovalna jedra na področju funkcionalne analize, algebre, topologije, teorije grafov in diferencialnih enačb in velja za začetnika in utemeljitelja teoretične matematike na Univerzi v Mariboru.

Danilo Zavrtanik je dosegel izjemne raziskovalne rezultate na različnih podpodročjih fizike visokih energij. Znanstveno delovanje je začel v Evropski organizaciji za jedrske raziskave (CERN) z raziskavami osnovnih delcev z detektorjema delcev OMICRON in CPLEAR, nadaljeval pa z iskanjem Higgsovega bozona z detektorjem DELPHI. Kasneje se je raziskovalno usmeril k astrofiziki visokoenergijskih kozmičnih delcev. Prispeval je k meritvam njihovega spektra ter študiju izvorov. Aktivno je sodeloval pri zasnovi in izgradnji največjega observatorija za kozmične delce na svetu Pierre Auger v Argentini, v zadnjih letih pa se posveča raziskavam visokoenergijskih kozmičnih fotonov z nastajajočim observatorijem Cherenkov Telescope Array. Sodeloval je pri pridružitvi Slovenije CERN-u. Ustanovil je Mednarodno podiplomsko šolo za znanosti o okolju v Novi Gorici in jo dolga leta vodil ter razvil do uspešne Univerze v Novi Gorici, kjer je zdaj sodelavec. Sodeluje tudi z Institutom »Jožef Stefan«.

Maruša Bradač je prejela priznanje ambasadorka znanosti Republike Slovenije za krepitev ugleda slovenske astrofizike v družbi in v mednarodnem merilu. Je svetovno uveljavljena astrofizičarka, ki je svojo študijsko pot začela v Sloveniji, doktorirala v Nemčiji in nadaljevala raziskovalno kariero v Združenih državah Amerike. S svojimi objavami in idejami pomembno prispeva k meritvam obstoja in lastnosti temne snovi ter prvih galaksij v mladem vesolju. Njene pionirske raziskave jat galaksij do danes ostajajo najpomembnejši neposredni dokaz obstoja temne snovi in njenih lastnosti. Ključna je bila tudi njena vloga pri razvoju najnovejšega vesoljskega teleskopa James Webb. S svojo skupino je sodelovala pri razvoju enega od ključnih znanstvenih instrumentov na teleskopu – kamere NIRISS. Vodi tudi projekt Evropskega raziskovalnega sveta (ERC). S podatki vesoljskega teleskopa James Webb proučuje obdobje temnega veka vesolja. Je profesorica na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, ki je z njenim prihodom postala nov evropski center za raziskave z Webbovim vesoljskim teleskopom.

Vsem nagrajencem, še posebej pa članom društva, izrekamo iskrene čestitke za nagrade, priznanja in dosežke.

LITERATURA

[1] *Razglasitev prejemnic in prejemnikov državnih nagrad in priznanj na področju znanosti*, dostopno na `https://www.gov.si/novice/2023-10-13-razglasitev-prejemnic-in-prejemnikov-drzavnih-nagrad-in-priznanj-na-podrocju-znanosti/`, ogled 1. 2. 2024.

Aleš Mohorič

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 70 (2023)
številke 1–4, strani 1–160

Članki — Articles

Vesti — News

Nove knjige — New books

Iz zgodovine — Miscellanea

Uredništvo

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, DECEMBER 2023
Letnik 70, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Fotografija na naslovnici kaže Sonce tik nad obzorjem. Ali bi iz nje znali presoditi, ali kaže vzhod ali zahod? Sončni vzhod simbolizira nove začetke, upanje in optimizem, zahod pa vzbudi občutek zaključka, refleksije in miru. V statični fotografiji ne moremo ločiti sončnega vzhoda od zahoda, pri obeh so barve neba simetrične, le spreminjajo se v obratnem poteku. Možne so sicer subtilne razlike v barvah in odtenkih. Barve sončnega vzhoda so običajno nežne pastelne barve, kot so roza, oranžna in vijolična, ob zahodu pa se prikažejo tople barve, kot so oranžna, rdeča in zlata. Zjutraj je zrak običajno bolj čist, kar ustvari bolj jasen videz, zvečer pa zrak lahko vsebuje več delcev, kar videz nekoliko zamegli. Najlažje seveda presodimo, če vemo, v katero smer neba je bila kamera obrnjena in ali je bil posnetek narejen zjutraj ali zvečer.