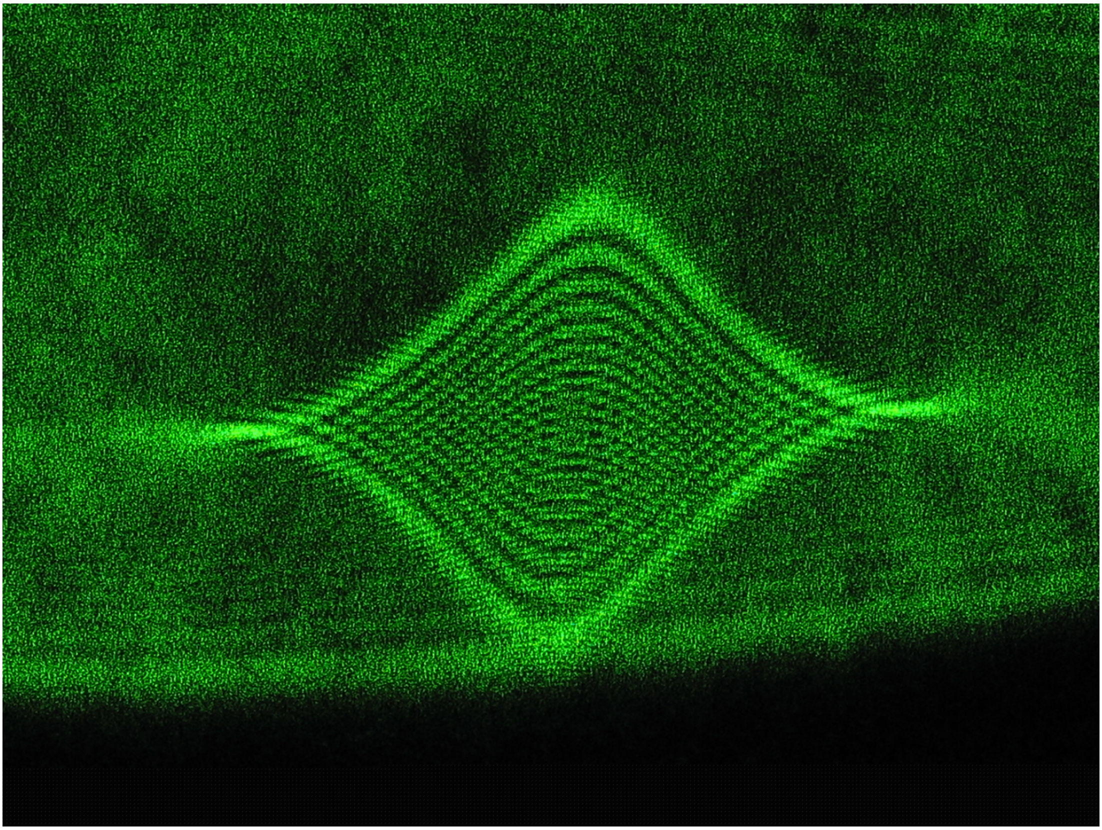
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2010
Letnik 57
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 57 • ŠT. 1 • STR. 1–40 • JANUAR 2010

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2010, letnik 57, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `Zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

SCHNIRELMANNOV IZREK

VINKO MEDIC

Šolski center Novo mesto

Math. Subj. Class. (2010): 11P32

Lev Schnirelmann[1] (1905–1938) je leta 1930 dokazal, da je vsako naravno število, večje od ena, vsota končnega števila praštevil. To je zelo pomemben izrek in hkrati prvi odmevnejši rezultat v zvezi z Goldbachovo domnevo. V tem članku bo predstavljen dokaz z njegovim kriterijem za celoštevilske množice kot baze s končnim redom.

SCHNIRELMANN'S THEOREM

In 1930 Schnirelmann proved that every integer greater than one is the sum of a finite number of primes. This is a great theorem, the first significant result on the Goldbach conjecture. In this contribution we shall apply Schnirelmann's criterion for a set of integers to be a basis of finite order.

1. Uvod

Goldbachova domneva je eden najstarejših problemov v teoriji števil in nasploh v matematiki. Hilbert jo je leta 1900 uvrstil na seznam triindvajsetih največjih matematičnih izzivov dvajsetega stoletja. Goldbachova domneva je zapisana na osmem mestu, skupaj s splošno Riemannovo hipotezo, in je eden od redkih problemov s tega seznama, ki ni rešen. Originalna domneva je bila prvič zapisana v pismu, ki ga je Christian Goldbach (1690–1764) 7. junija 1742 poslal Eulerju. V njem je trdil, da lahko vsako naravno število, večje od 5, zapišemo kot vsoto treh praštevil. Euler je odgovoril, da se strinja z domnevo, vendar je ne zna dokazati. Kasneje jo je spremenil v drugo obliko, ki pravi, da lahko vsako sodo naravno število, večje od dve, zapišemo kot vsoto dveh praštevil (isto praštevilo lahko uporabimo dvakrat). Primeri: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7, \ldots$ Ta oblika je danes znana kot *krepka* Goldbachova domneva. Obstaja tudi *šibka* oblika Goldbachove domneve, ki pravi, da je vsako liho naravno število, večje od 5, vsota treh praštevil. Obe domnevi sta do sedaj ostali nerešeni, čeprav je rešitev šibke domneve bliže kot rešitev krepke. V tem članku bo predstavljen Schnirelmannov pristop k reševanju problema.

[1]Ruski matematik, Luzinov učenec

2. Schnirelmannova gostota

Naj bo A množica nenegativnih celih števil. Za vsako realno število x naj pomeni $A(x)$ število pozitivnih elementov množice A, ki ne presegajo x, tj.

$$A(x) = \sum_{\substack{a\in A \\ 1\leq a\leq x}} 1.$$

Funkcijo $x \mapsto A(x)$ imenujemo *števna funkcija množice* A. Za $x > 0$ velja $0 \leq A(x) \leq [x] \leq x$, kjer označuje $[x]$ največje celo število, ki ne presega x.

Definicija 1. *Schnirelmannovo gostoto* množice A definiramo s predpisom

$$\sigma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{A(n)}{n}\,.$$

Ker je $\sigma(A) \leq \frac{A(n)}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je $0 \leq \sigma(A) \leq 1$.

Poglejmo si nekaj primerov množic naravnih števil in jim določimo števno funkcijo ter Schnirelmannovo gostoto.

(a) Za množico $A = \mathbb{N}$ vseh naravnih števil je $A(n) = n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, njena Schnirelmannova gostota pa je $\sigma(A) = 1$. Ker tudi obratno hitro vidimo, je $\sigma(A) = 1$ natanko takrat, ko je $A = \mathbb{N}$.

(b) Za množico B, ki vsebuje vsa naravna števila razen enega, npr. $B = \mathbb{N} \setminus \{m\}$, je števna funkcija $B(n) = n$ za $n < m$ in $B(n) = n - 1$ za $n \geq m$, zato velja $\sigma(B) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{B(n)}{n} = \frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$. Če je $m = 1$, je $B(1) = 0$ in zato $\sigma(B) = 0$.

(c) Za množico C, ki vsebuje vse večkratnike naravnega števila d in število 1, tj. $C = \{1\} \cup \{kd; k \in \mathbb{N}\}$, smo za primer, ko je $d = 1$, že ugotovili, da ima množica C gostoto 1. Če pa $d \neq 1$, je števna funkcija $C(n) = \left[\frac{n}{d}\right] + 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato velja $\sigma(C) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left[\frac{n}{d}\right]+1}{n} = \frac{1}{d}$. Vidimo, da z večanjem razlike d v aritmetičnem zaporedju Schnirelmannova gostota pada, vendar ostaja pozitivna.

(d) Za množico D, ki vsebuje potence danega naravnega števila k, tj. $D = \{1\} \cup \{k^n; n \in \mathbb{N}\}$, je za $k = 1$ očitno $\sigma(D) = 0$, saj je v D le eno število. V primeru, ko je $k > 1$, pa je števna funkcija $D(n) = [\log_k n] + 1$. Tako je njena gostota $\sigma(D) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{[\log_k n]+1}{n} = 0$.

(e) V zadnjem primeru si oglejmo še množico P, ki vsebuje 1 in vsa praštevila. Tokrat se števna funkcija $P(n)$ za velika števila n obnaša približno kot izraz $c\frac{n}{\ln n}$, pri čemer je c pozitivna konstanta (praštevilski izrek, glej [1]), zato je njena gostota $\sigma(P) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{c}{\ln n} = 0$.

Schnirelmannova gostota je pomembna mera za velikost podmnožic nenegativnih celih števil. Za nadaljevanje potrebujemo nov pojem baze končnega reda.

Definicija 2. Podmnožica A nenegativnih celih števil se imenuje *baza reda h*, če hA vsebuje vsa nenegativna cela števila (tj. če lahko vsako nenegativno celo število zapišemo kot vsoto h, ne nujno različnih števil iz A). Množici A pravimo *baza končnega reda*, če je baza reda h za neko število $h \geq 1$.

Če so $A_1, \ldots, A_h$ podmnožice nenegativnih celih števil, je vsota $A_1 + \cdots + A_h$ sestavljena iz vseh nenegativnih celih števil oblike $a_1 + \cdots + a_h$, kjer je $a_i \in A_i$ za vsak $i = 1, \ldots, h$. Če je $A_i = A$ za vse $i = 1, \ldots, h$, pa naj bo $hA = \underbrace{A + \cdots + A}_{h\text{-krat}}$.

Po točki (a) z začetka razdelka je podmnožica A baza reda h natanko tedaj, ko je $\sigma(hA) = 1$. Schnirelmann je prišel do preprostega, vendar pomembnega odkritja, da je podmnožica nenegativnih celih števil, ki vsebuje 0 in ima pozitivno gostoto, baza končnega reda (glej izrek 8 na koncu tega razdelka). Preden pa to dejstvo dokažemo, si oglejmo najpomembnejše lastnosti Schnirelmannove gostote.

Trditev 3. *Naj bosta A in B podmnožici celih števil, ki vsebujeta* 0. *Če je $n \geq 0$ in $A(n) + B(n) \geq n$, je $n \in A + B$.*

Dokaz. Če je $n \in A$ ali $n \in B$, je očitno $n \in A + B$; zato predpostavimo $n \notin A \cup B$. Definirajmo množici $A' = \{n - a\colon a \in A, 1 \leq a \leq n - 1\}$ in $B' = \{b\colon b \in B, 1 \leq b \leq n-1\}$. Potem je moč množice A' enaka $|A'| = A(n)$, ker $n \notin A$, in moč množice B' je $|B'| = B(n)$, ker $n \notin B$. Očitno velja

$$A' \cup B' \subseteq [1, n-1]\,.$$

Ker je

$$|A'| + |B'| = A(n) + B(n) \geq n\,,$$

mora biti

$$A' \cap B' \neq \emptyset\,.$$

Torej je $n - a = b$ za neka $a \in A$ in $b \in B$ oziroma $n = a + b \in A + B$. ∎

Trditev 4. *Naj bosta A in B podmnožici celih števil, ki vsebujeta* 0*. Če je $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$, je $n \in A + B$ za vsako nenegativno celo število n.*

Dokaz. Če označimo $\sigma(A) = \alpha$ in $\sigma(B) = \beta$, je za $n \geq 0$

$$A(n) + B(n) \geq (\alpha + \beta)n \geq n\,,$$

zato iz trditve 3 sledi $n \in A + B$. ∎

Posledica 5. *Če je A množica celih števil, ki vsebuje* 0 *in za katero je $\sigma(A) \geq 1/2$, je A baza reda* 2*.*

Trditev 6. *Naj bosta A in B takšni podmnožici celih števil, ki vsebujeta* 0*. Potem je*

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)\,. \tag{1}$$

Dokaz. Za utemeljitev te lastnosti ocenimo, koliko naravnih števil, ki ne presegajo n, vsebuje množica $A + B$. V ta namen razdelimo interval $[0, n]$ na $k + 1$ delov, pri čemer je $k = A(n)$. Torej naj bo $n \geq 1$, $a_0 = 0$ in

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$$

k pozitivnih elementov množice A, ki ne presegajo n. Ker je $0 \in B$, je $a_i = a_i + 0 \in A + B$ za vse $i = 1, \ldots, k$. Sedaj pa poiščimo na vsakem intervalu (a_i, a_{i+1}) števila, ki pripadajo množici $A + B$. Tako naj bo za $i = 0, \ldots, k - 1$,

$$1 \leq b_1 < \cdots < b_{r_i} \leq a_{i+1} - a_i - 1$$

$r_i = B(a_{i+1} - a_i - 1)$ pozitivnih elementov množice B, ki so manjši od $a_{i+1} - a_i$. Potem je

$$a_i < a_i + b_1 < \cdots < a_i + b_{r_i} < a_{i+1}$$

in

$$a_i + b_j \in A + B$$

za vse $j = 1, \dots, r_i$. Nadalje poglejmo še števila na zadnjem intervalu $(a_k, n]$. Naj bo

$$1 \le b_1 < \cdots < b_{r_k} \le n - a_k$$

$r_k = B(n - a_k)$ pozitivnih elementov množice B, ki ne presegajo $n - a_k$. Potem je

$$a_k < a_k + b_1 < \cdots < a_k + b_{r_k} \le n$$

in

$$a_k + b_j \in A + B$$

za vse $j = 1, \dots, r_k$. Vendar ni nujno, da po zgornjem postopku dobimo vsa števila, saj lahko obstajata takšni števili a_i in b_j, da njuna vsota ni enaka nobeni vsoti iz naše razdelitve, pa vseeno ne presega števila n. Iz tega razloga je v množici $A+B$ več števil, ki ne presegajo števila n, kot pa v naši razdelitvi na $k+1$ delov. Označimo $\sigma(A) = \alpha$ in $\sigma(B) = \beta$ pa imamo

$$\begin{aligned}
(A+B)(n) &\ge A(n) + \sum_{i=0}^{k-1} B(a_{i+1} - a_i - 1) + B(n - a_k) \ge \\
&\ge A(n) + \beta \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i - 1) + \beta(n - a_k) = \\
&= A(n) + \beta(a_1 - a_0 - 1 + a_2 - a_1 - 1 + \cdots + \\
&\quad + a_k - a_{k-1} - 1) + \beta(n - a_k)\,.
\end{aligned}$$

V tej vsoti se veliko členov odšteje. Od preostanka izpostavimo β in dobimo

$$(A+B)(n) \ge A(n) + \beta(-a_0 - k + n)\,.$$

Upoštevamo, da je $a_0 = 0$ in $k = A(n)$

$$(A+B)(n) \ge A(n) + \beta n - \beta A(n) = (1-\beta)A(n) + \beta n\,.$$

Ker je $A(n) \ge \alpha n$, velja

$$(A+B)(n) \ge (1-\beta)\alpha n + \beta n = (\alpha + \beta - \alpha\beta) n\,.$$

Tako je

$$\frac{(A+B)(n)}{n} \ge \alpha + \beta - \alpha\beta$$

in

$$\sigma(A+B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{(A+B)(n)}{n} \ge \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)\,. \qquad \blacksquare$$

Neenakost (1) lahko zapišemo tudi kot:

$$1-\sigma(A+B) \leq (1-\sigma(A))(1-\sigma(B))$$

in jo posplošimo na vsoto poljubnih končnih podmnožic naravnih števil.

Trditev 7. *Naj bo h naravno število in $A_1, \ldots, A_h$ takšne podmnožice celih števil, da je $0 \in A_i$ za vsak $i = 1, \ldots, h$. Potem je*

$$1-\sigma(A_1+\cdots+A_h) \leq \prod_{i=1}^{h}(1-\sigma(A_i))\,. \tag{2}$$

Formalni dokaz z indukcijo na število množic prepustimo bralcu. Na koncu si oglejmo še najpomembnejšo lastnost Schnirelmannove gostote.

Izrek 8. *Naj bo A podmnožica celih števil, ki vsebuje 0 in ima pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Potem je A baza končnega reda.*

Dokaz. Če je $\sigma(A) = \alpha > 0$, je $0 \leq 1-\alpha < 1$; zato obstaja tako naravno število $l \geq 1$, da je

$$0 \leq (1-\alpha)^l \leq 1/2\,.$$

Potem je po trditvi 7

$$1-\sigma(lA) \leq (1-\sigma(A))^l = (1-\alpha)^l \leq 1/2$$

in tako

$$\sigma(lA) \geq 1/2\,.$$

Po posledici 5 je množica lA baza reda 2 in zato A baza končnega reda $2l$. ■

3. Schnirelmannov izrek

Sedaj se bomo posvetili dokazu Schnirelmannovega izreka. Pokazali bomo, da ima množica, sestavljena iz 0, 1 in naravnih števil, ki jih lahko predstavimo kot vsoto dveh praštevil, pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Za to pa potrebujemo različne ocene za povprečno število predstavitev naravnega števila kot vsote dveh praštevil. Preden začnemo, moramo vpeljati nekaj novih oznak.

Naj bo f poljubna realna ali kompleksna funkcija in g pozitivna funkcija. Zapis $f \ll g$ naj pomeni, da obstaja takšna konstanta $c > 0$, da velja

$$|f(x)| \leq cg(x)$$

za vse x iz definicijskega območja funkcije f. Oznaka $f \gg g$ pa naj pomeni isto kot $g \ll f$.

Naj $r(N)$ označuje število predstavitev naravnega števila N kot vsote dveh praštevil, pri čemer ločimo vrstni red sumandov. Naj bo $x \geq 2$ poljubno realno število. S $\pi(x)$ označimo število vseh praštevil, ki ne presegajo x (glej [1]). Če sta p in q praštevili, ki ne presegata $x/2$, njuna vsota $p+q$ ne presega x. Sedaj tvorimo vse možne vsote s tema dvema prašteviloma. Ker je do $x/2$ natanko $\pi(x/2)$ praštevil, dobimo natanko $\pi(x/2)^2$ urejenih parov vsot manjših ali enakih x. Vendar to niso vse vsote dveh praštevil, ki ne presegajo x, saj bi lahko veljalo $p+q \leq x$ tudi za praštevili, ki nista obe manjši od $x/2$. Torej velja

$$\sum_{N \leq x} r(N) \geq \pi(x/2)^2.$$

Uporabimo izrek Čebiševa, (glej [1], str. 173), ki pravi, da je $\pi(x/2) \gg \frac{x/2}{\log x/2}$, pa imamo

$$\sum_{N \leq x} r(N) \geq \pi(x/2)^2 \gg \frac{(x/2)^2}{(\log(x/2))^2} \gg \frac{x^2}{(\log x)^2}\,. \tag{3}$$

V [2] najdemo izrek (Theorem 7.2 na strani 186), ki pravi, da za vsako sodo naravno število N velja

$$r(N) \ll \frac{N}{(\log N)^2} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{N}{(\log N)^2} \sum_{d|N} \frac{1}{d}\,. \tag{4}$$

Ta neenakost velja tudi za liha naravna števila, saj je liho naravno število N vsota dveh praštevil natanko tedaj, ko je $N-2$ praštevilo. Za takšno liho naravno število je torej $r(N) = 2$. Naj bo $x \geq 1$ poljubno realno število. Z uporabo neenakosti (4) dobimo

$$\sum_{N \leq x} r(N)^2 \ll \sum_{N \leq x} \frac{N^2}{(\log N)^4} \left(\sum_{d|N} \frac{1}{d}\right)^2.$$

Ker je funkcija $\frac{N^2}{(\log N)^4}$ naraščajoča, jo navzgor ocenimo z največjo vrednostjo pri x. Vsoto $\left(\sum\limits_{d|N} \frac{1}{d}\right)^2$ pa zapišemo v ekvivalentni obliki

$$\left(\sum_{d_1|N} \frac{1}{d_1}\right)\left(\sum_{d_2|N} \frac{1}{d_2}\right) = \sum_{d_1|N}\sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2}\,.$$

Zdaj imamo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{N\le x}\left(\sum_{d|N}\frac{1}{d}\right)^2 = \frac{x^2}{(\log x)^4}\sum_{N\le x}\sum_{d_1|N}\sum_{d_2|N}\frac{1}{d_1 d_2}\,.$$

Zamenjamo vrstni red seštevanja in dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4}\sum_{d_1,d_2\le x}\frac{1}{d_1 d_2}\sum_{\substack{N\le x\\ d_1|N,d_2|N}} 1.$$

Zadnja vsota je različna od 0 samo v primeru, ko d_1 in d_2 hkrati delita N. To pomeni natanko takrat, ko njun najmanjši skupni večkratnik $[d_1, d_2]$ deli N. Vsoto ocenimo navzgor, pa dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4}\sum_{d_1,d_2\le x}\frac{1}{d_1 d_2}\sum_{\substack{N\le x\\ [d_1,d_2]|N}} 1 \le \frac{x^2}{(\log x)^4}\sum_{d_1,d_2\le x}\frac{1}{d_1 d_2}\frac{x}{[d_1,d_2]}\,.$$

Izpostavimo x, upoštevamo oceno $[d_1, d_2] = \frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)} \ge (d_1 d_2)^{1/2}$ za najmanjši skupni večkratnik $[d_1, d_2]$ in največji skupni delitelj (d_1, d_2) števil d_1 in d_2 ter zopet uvedemo sumacijsko spremenljivko d:

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^3}{(\log x)^4}\sum_{d_1,d_2\le x}\frac{1}{d_1^{3/2} d_2^{3/2}} = \frac{x^3}{(\log x)^4}\left(\sum_{d\le x}\frac{1}{d^{3/2}}\right)^2.$$

Zadnja vsota konvergira, ko gre x čez vse meje, ker je eksponent v imenovalcu večji od ena. Tako dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^3}{(\log x)^4}. \tag{5}$$

Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti velja

$$\left(\sum_{N\le x} r(N)\right)^2 \le \sum_{\substack{N\le x\\ r(N)\ge 1}} 1 \sum_{N\le x} r(N)^2.$$

Vsota $\sum\limits_{\substack{N\le x\\ r(N)\ge 1}} 1$ prešteje vsa naravna števila N, ki ne presegajo x in jih lahko vsaj na en način zapišemo kot vsoto dveh praštevil. Torej je ta vsota enaka števni funkciji $A(x)$ za množico A vseh naravnih števil, ki se dajo zapisati kot vsota dveh praštevil. Tako imamo

$$\left(\sum_{N\le x} r(N)\right)^2 \le A(x) \sum_{N\le x} r(N)^2.$$

Iz neenakosti izrazimo $A(x)$, tako da je

$$A(x) \ge \frac{\left(\sum\limits_{N\le x} r(N)\right)^2}{\sum\limits_{N\le x} r(N)^2}\,.$$

Po deljenju z x dobimo

$$\frac{A(x)}{x} \ge \frac{1}{x}\frac{\left(\sum\limits_{N\le x} r(N)\right)^2}{\sum\limits_{N\le x} r(N)^2}\,.$$

Upoštevajmo oceni (3) in (5), pa od tod sledi

$$\frac{A(x)}{x} \gg \frac{1}{x}\frac{\frac{x^4}{(\log x)^4}}{\frac{x^3}{(\log x)^4}} \gg 1\,.$$

Prepričajmo se, da ima množica $A = \{0,1\} \cup \{p+q : p,q \quad \text{praštevili}\}$ pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Pravkar smo videli, da obstaja takšno število $c_1 > 0$, da je $A(x) \ge c_1 x$ za vsa dovolj velika števila $x \ge x_0$. Ker pa 1 pripada množici A, obstaja takšno število $c_2 > 0$, da je $A(x) \ge c_2 x$ tudi za $1 \le x \le x_0$. Torej $A(x) \ge cx$ za vse $x \ge 1$, pri čemer je $c = \min\{c_1, c_2\}$. Iz tega lahko sklepamo, da je Schnirelmannova gostota množice A pozitivna.

Izrek 9 (Schnirelmann). *Obstaja takšno naravno število H, da lahko vsako naravno število, večje kot ena, zapišemo kot vsoto kvečjemu H praštevil.*

Dokaz. Pokazali smo, da ima množica

$$A = \{0, 1\} \cup \{p + q \colon p, q \text{ sta praštevili}\}$$

pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Zato obstaja po izreku 8 takšno naravno število h, da je vsako nenegativno celo število N vsota natanko h elementov množice A. Naj bo $N \geq 2$ oziroma $N - 2 \geq 0$. Zapišimo $N - 2$ kot vsoto k enic in l parov praštevil p_i, q_i, pri čemer velja $k+l \leq h$ $(k, l \geq 0)$. Torej je

$$N - 2 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k} + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l)\,.$$

Če je k sodo število, to je $k = 2m$, potem po prenosu števila 2 na desno stran dobimo

$$N = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{m+1} + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l)\,.$$

Vidimo, da je tedaj N vsota $m + 1 + 2l$ praštevil. V primeru, da je k liho število $k = 2m + 1$, pa imamo

$$N = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{m} + 3 + (p_1 + q_1) + \cdots + (p_l + q_l)\,.$$

Torej je tudi v tem primeru N vsota $m + 1 + 2l$ praštevil. Ker števili l in $m+l$ ne presegata h, velja $m+1+2l \leq 2h+1$. Ugotovili smo, da lahko vsako naravno število $N > 1$ zapišemo kot vsoto kvečjemu $2h + 1 = H$ praštevil. ∎

Število H se imenuje Schnirelmannova konstanta in je po Schnirelmannovih izračunih znašala 300 000. Kasneje so konstanto z natančnejšimi ocenami močno zmanjšali. Najboljši rezultat doslej je leta 1995 dosegel Olivier Ramaré, ki je pokazal, da je Schnirelmannova konstanta enaka največ 6. Torej lahko vsako naravno število, ki je večje od 1, zapišemo kot vsoto kvečjemu šestih praštevil.

LITERATURA

[1] J. Bračič, *Uvod v analitično teorijo števil*, Podiplomski seminar iz matematike 26, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2003.

[2] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics 164, Springer-Verlag, 1996.

[3] *Goldbach Conjecture*, `http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html`.

DETEKCIJA NEVIDNIH INTERFERENČNIH SLIK Z MICHELSONOVIM INTERFEROMETROM

IVO VEROVNIK

Zavod Republike Slovenije za šolstvo
Ljubljana

in

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 07.50.Hp, 01.65.+g

Pri poskusih z Michelsonovim interferometrom so interferenčne proge vidne s polnim kontrastom le, če sta kraka interferometra enako dolga. Z večanjem razlike dolžin krakov se kontrast interferenčnih prog manjša in te popolnoma izginejo pri razlikah, ki so znatno večje od koherenčne dolžine uporabljene svetlobe. Če za detekcijo svetlobe uporabimo senzorje, ki se dovolj hitro odzivajo na njene spremembe, lahko izmerimo razmike med sicer nevidnimi interferenčnimi progami tudi pri velikih razlikah dolžin krakov interferometra. Predstavljen je eksperiment, ki sva ga načrtovala in izvedla, didaktični modeli ter orodja za razlago pojava.

DETECTION OF INVISIBLE INTERFERENCE PATTERNS USING MICHELSON INTERFEROMETER

In experiments with Michelson interferometer the interference pattern can be seen at full contrast in case of equidistant position of the both mirrors. When the difference of the lengths of both arms increases, the contrast fades away due to incoherence of light and the pattern diminishes completely when the difference is substantially bigger than the coherence length of the light. When using fast enough detectors, the distance between invisible interference fringes can be detected even at large difference of the length of the interferometer arms. The experiment, which we carried out, and the didactical models and tools to explain the phenomenon are presented.

1. Uvod

Pri obravnavi interferenčnih pojavov s svetlobo v šoli poudarimo, da se interferenca pojavi le, kadar sestavljamo dva koherentna snopa svetlobe. Z razmeroma skromno eksperimentalno opremo, dosegljivo tudi šolskim laboratorijem, lahko pokažemo, da interferenčni pojavi nastanejo tudi pri uporabi nekoherentnih virov svetlobe. Prve eksperimente te vrste, ki so po svoji naravi sorodni z interferenco svetlobe po prehodu skozi dvojno režo, sva že opisala v nekaterih člankih [1 do 4]. Poročila o drugačnih eksperimentih, ki opisujejo interferenco svetlobe iz nekoherentnih virov, pa najdemo tudi v člankih drugih avtorjev [5 in 6]. V nadaljevanju bova opisala način, kako lahko z uporabo Michelsonovega interferometra opazujemo in merimo interferenčne slike, dobljene z nekoherentnimi snopi svetlobe. Pri tem je ugodno predvsem to, da z Michelsonovim interferometrom razmeroma preprosto nadziramo ključne eksperimentalne parametre. Namesto tehniških podrobnosti eksperimenta, ki jih lahko najdemo v članku [7], bodo tu predstavljene predvsem didaktične rešitve in orodja za razlago tega pojava.

Kontrast interferenčnih slik, ki jih dobimo z Michelsonovim interferometrom, je odvisen od dolžine njegovih krakov. Poln kontrast dosežemo, ko sta zrcali kraka postavljeni simetrično glede na polprepustno zrcalo. Če dolžini krakov nista enaki, se pri večanju njune razlike zmanjšuje kontrast interferenčne slike. Interferenčna slika se popolnoma zabriše, ko je razlika dolžin krakov mnogo večja od koherenčne dolžine uporabljene svetlobe.

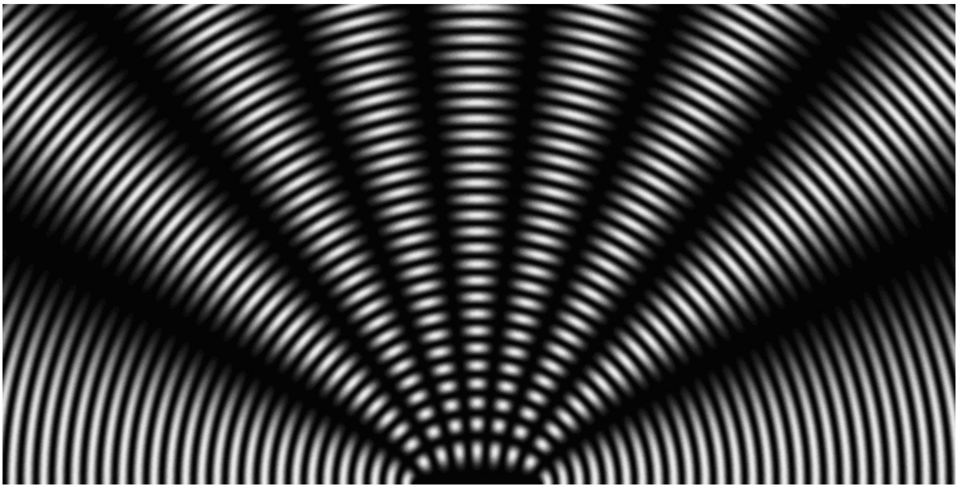
Obstaja dokaj splošno prepričanje, da je v primeru popolnoma zabrisane interferenčne slike izgubljena tudi vsa informacija o interferenčnih progah, npr. tudi o njihovi medsebojni razdalji, ki je pogosto pomemben podatek pri meritvah z Michelsonovim interferometrom. Da to ne drži, bova pokazala, da lahko izmerimo razmike med interferenčnimi progami tudi v popolnoma zabrisani interferenčni sliki.

Pojav sam in rezultate meritev podrobno pojasnimo z uporabo relativno zapletenih matematično-fizikalnih izpeljav. To je seveda nujno, ko želimo natanko opisati eksperiment. Pri tem je za boljše razumevanje koristno, če razlago podpremo z gradivi, ki omogočajo boljšo vizualno predstavo o dogajanju med izvajanjem eksperimenta. Še posebej je to pomembno, ko gre za zapleteno sočasno časovno in prostorsko spreminjanje fizikalnih količin, ki so ključne za izid eksperimenta. Včasih se lahko zadovoljimo tudi s tem, da študenti na kvalitativni ravni razumejo dogajanje in izid eksperimenta, ne da bi se jim bilo treba prebijati skozi zahtevne izpeljave. V takih primerih si lahko pomagamo z mehanskimi analogijami eksperimenta, ki jih lahko s čutili neposredno zaznavamo, ali pa uporabimo ustrezne računalniške simulacije in animacije. V nadaljevanju bodo predstavljene nekatere take rešitve, ki omogočajo razumevanje izida našega eksperimenta.

2. Zvočni ekvivalent eksperimenta z dvojno režo

Kot primer, ki bo podprl razumevanje našega eksperimenta z Michelsonovim interferometrom, vzemimo najprej zvočni ekvivalent uklona in interference svetlobe po njenem prehodu skozi dvojno režo.

Dva zvočnika, ki sta drug od drugega oddaljena okoli enega metra, priključimo na tonski generator s sinusnim signalom frekvence okoli 800 Hz. V tem primeru dobimo interferenco, pri kateri lahko slušno zaznavamo področja ojačitev in oslabitev preprosto tako, da se premikamo po prostoru pred zvočnikoma. Eksperiment spremenimo tako, da na en zvočnik priključimo signal s frekvenco 800 Hz, na drugega pa signal z nekoliko višjo frekvenco, denimo 801 Hz. Če pred izvedbo tega eksperimenta vprašamo študente, kaj bodo slišali, lahko v večini primerov pričakujemo pravilen odgovor - utripanje s frekvenco 1 Hz. Nadaljujemo lahko z dodatnim vprašanjem, ki se nanaša na energijo zvoka: Kam gre energija zvoka ob trenutkih tišine, medtem ko poslušamo utripanje zvoka? Odgovor na to vprašanje ni preprost.



Slika 1. Trenutna slika animacije, ki prikazuje obračanje interferenčnega polja, če se frekvenci zvoka iz zvočnikov na spodnjem robu slike (nista prikazana) nekoliko razlikujeta.

Ob razlagi pomena relativnih faz dveh izvirov valovanja uporabimo animacijo interferenčnega polja pred zvočnikoma, ki pripomore k razumevanju tega pojava. Pri različnih frekvencah se celotno interferenčno polje obrača v določeno smer, tako da se v katerikoli izbrani točki v prostoru pred zvočnikoma energijski tok zvočnega polja spreminja s periodo, ki je enaka frekvenci utripanja, v našem primeru s frekvenco 1 Hz (slika 1).

3. Eksperiment z dvojno režo in Michelsonov interferometer

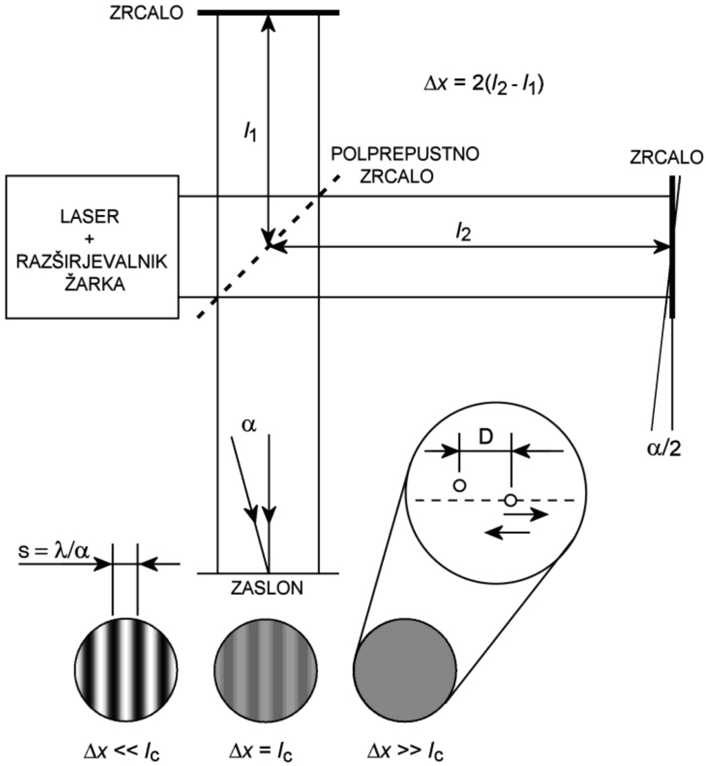
Pri razlagi originalnega eksperimenta z dvojno režo, imenovanega tudi po avtorju kot Youngov eksperiment, je treba poudariti pomen konstantne fazne razlike svetlobnega valovanja iz obeh rež, ki zagotavlja statično interferenčno sliko. Reži namreč osvetljuje en sam, ustrezno majhen izvir svetlobe. Če namesto dveh rež vzamemo dva neodvisna svetlobna izvira, se relativna fazna razlika obeh izvirov naključno spreminja. To ima za posledico naključne spremembe lege interferenčnega polja. Senzorji, ki se počasi odzivajo na spremembe energijskega toka svetlobe, kot je npr. naše oko, ne morejo zaznavati hitrih sprememb interferenčne slike, tako da je zaslon videti enakomerno osvetljen. Hitri senzorji, kot so npr. polprevodniške fotodiode, pa lahko pri ustreznih pogojih registrirajo svetlobne fluktuacije.

Uporabila sva Michelsonov interferometer, ki omogoča relativno preprosto kontrolo parametrov, ki določajo lastnosti interferenčne slike. Dekoherenco dveh svetlobnih snopov, ki ju pri Michelsonovem interferometru dobimo s pomočjo polprepustnega zrcala, dosežemo s povečanjem dolžine enega od krakov interferometra tako, da je razlika svetlobnih poti iz obeh krakov mnogo večja od koherenčne dolžine svetlobe. Kot svetlobni izvir smo v našem eksperimentu uporabili polprevodniški laser, ki oddaja rdečo svetlobo valovne dolžine 660 nm.

Relativna faza obeh svetlobnih snopov se na zaslonu, kjer opazujemo interferenčno sliko, sedaj zelo hitro naključno spreminja, kar povzroča zelo hitro spreminjanje lege interferenčnih prog. S prostim očesom ne vidimo interferenčne slike, saj je zaradi hitrih naključnih premikov popolnoma zabrisana.

4. Merjenje svetlobnih fluktuacij z dvema senzorjema

Namesto enega samega hitro odzivnega senzorja, ki lahko meri naključne spremembe energijskega toka svetlobe, uporabimo dva senzorja. V tem primeru je stopnja korelacije izmerjenih signalov iz obeh senzorjev odvisna od njune medsebojne razdalje. Ta medsebojna odvisnost omogoča neposredno določitev razdalje med za oko nevidnimi interferenčnimi progami. Slika 2 prikazuje postavitev eksperimenta.

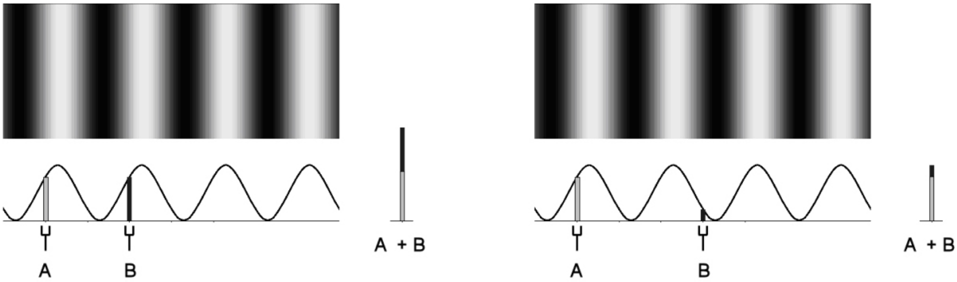


Slika 2. Razširjeni laserski snop svetlobe z valovno dolžino λ obravnavamo kot ravno valovanje. Na zaslonu interferometra svetlobni valovanji iz obeh krakov interferirata, tako da nastanejo vzporedne interferenčne proge v medsebojni razdalji λ/α, kjer je α kot med obema snopoma svetlobe. Kontrast interferenčne slike izginja z večanjem razlike dolžin krakov interferometra in popolnoma izgine pri razliki dolžin, ki so mnogo večje od koherenčne dolžine svetlobe l_c. Informacijo o medsebojni razdalji interferenčnih prog dobimo z merjenjem fluktuacij seštetega signala iz dveh senzorjev v medsebojni razdalji D.

5. Animacija kot pomoč pri razlagi delovanja fluktuacijskega interferometra

Ker si je sočasno spreminjanje več količin med meritvijo relativno težko predstavljati, si pri razlagi lahko pomagamo z animacijo. Ta ponazarja spreminjanje seštetega signala iz dveh senzorjev pri različnih medsebojnih razdaljah, medtem ko se lega interferenčnih prog spreminja. Pripravila sva dve animaciji, kjer sta senzorja v dveh ekstremnih legah glede na velikost fluktuacij (slika 3).

Animaciji nazorno pojasnjujeta velikost seštetega signala iz dveh sen-



Slika 3. Seštevanje signalov dveh senzorjev: trenutni sliki dveh animacij, pri katerih se interferenčna slika skupaj z diagramom na spodnjem delu enakomerno premika proti desni. Senzorja A in B v obeh primerih ostajata na istih mestih. Višina črt nad senzorjema kaže trenutno velikost izmerjenih signalov. Levo: Razdalja med senzorjema je enaka razdalji med sosednjimi interferenčnimi progami. Sešteti signal $A+B$ v tem primeru maksimalno fluktuira. Desno: Razdalja med senzorjema je enaka poldrugi razdalji med sosednjimi interferenčnimi progami. Sešteti signal je v tem primeru konstanten.

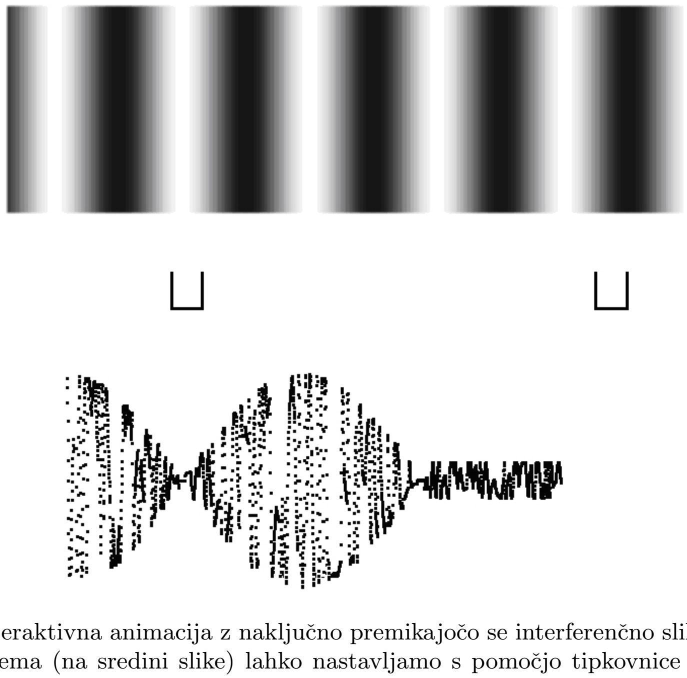
zorjev v odvisnosti od njune medsebojne razdalje. Levi del slike 3 prikazuje razmere, ko dobimo največje fluktuacije seštetega signala. Razdalja med senzorjema A in B, ki med meritvijo ostajata na istih mestih, je enaka razdalji med sosednjimi interferenčnimi progami. V animaciji se interferenčni vzorec enakomerno premika v desno skupaj z diagramom, ki prikazuje osvetljenost zaslona. Črti nad senzorjema kažeta velikost izmerjenih signalov, ki se v tem primeru sinhrono periodično spreminjata od nič do maksimalne vrednosti. Vsota obeh signalov $A+B$ se zaradi tega spreminja od nič do dvakratne maksimalne vrednosti signala enega senzorja. Fluktuacije seštetega signala so v tem primeru maksimalne. Enake fluktuacije dobimo pri vsaki razdalji med senzorjema, ki je enaka večkratniku razdalje med sosednjimi interferenčnimi progami.

Desna stran slike 3 prikazuje podobno situacijo kot leva, le da je tu razdalja med senzorjema enaka poldrugi razdalji med sosednjimi interferenčnimi progami. Sedaj spreminjanje signalov iz senzorjev ni več sinhrono. Ko izmeri senzor A maksimalno vrednost, je velikost signala senzorja B enaka nič in obratno. Če velikost signala iz enega senzorja narašča, signal iz drugega senzorja v enaki meri pada. Sešteti signal $A + B$ se ne spreminja in je po velikosti enak maksimalni vrednosti signala iz enega senzorja. Konstanten signal oz. signal z minimalnimi fluktuacijami dobimo vedno v primerih, ko je razdalja med senzorjema enaka lihemu večkratniku polovične razdalje med sosednjimi interferenčnimi progami.

S senzorji, ki lahko sledijo spremembam energijskega toka svetlobe v interferenčni sliki, izmerimo različno amplitudo fluktuacij seštetih signalov pri različnih medsebojnih razdaljah senzorjev. Povprečna vrednost seštetega signala v vseh primerih ostaja enaka, ne glede na medsebojno razdaljo senzorjev. Z merjenjem velikosti fluktuacij lahko torej določimo medsebojno razdaljo med interferenčnimi progami v hitro se premikajočih interferenčnih vzorcih. Ta razdalja je preprosto enaka spremembi dveh zaporednih razdalj med senzorjema, kjer izmerimo maksimalne ali minimalne fluktuacije.

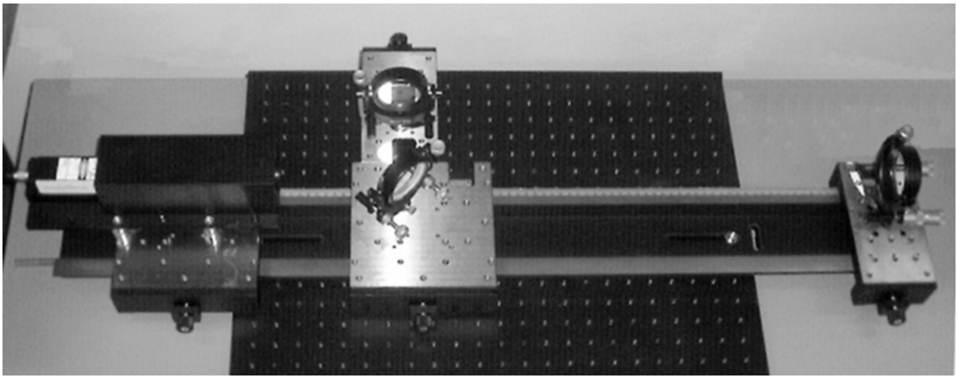
6. Simulacija meritev pri naključnih spremembah relativnih faz svetlobnih snopov

Interaktivno računalniško simulacijo meritev lahko izdelamo tako, da je po vsebini še korak bližje pravemu laboratorijskemu eksperimentu. Slika 4 kaže posnetek dela računalniškega zaslona s programom, ki simulira velikost seštetih signalov iz dveh senzorjev pri naključnem spreminjanju relativnih faz dveh svetlobnih valovanj. Pri tem lahko razdaljo med senzorjema zvezno spreminjamo s pritiskanjem tipke na tipkovnici. Sešteti signal se sproti izrisuje na spodnjem delu računalniškega zaslona.



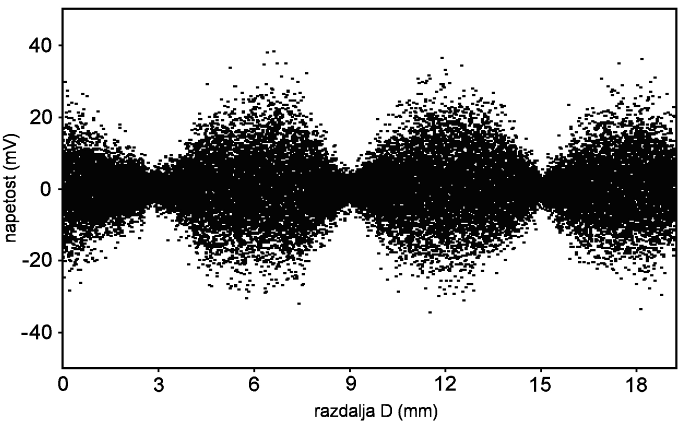
Slika 4. Interaktivna animacija z naključno premikajočo se interferenčno sliko. Razdaljo med senzorjema (na sredini slike) lahko nastavljamo s pomočjo tipkovnice računalnika. Izmenična komponenta seštetega signala se izrisuje na spodnjem delu zaslona.

7. Eksperiment



Slika 5. Fotografija postavitve eksperimenta, ki je shematično prikazan na sliki 2.

Eksperiment s tehniškimi detajli je pojasnjen v objavljenem članku [7], zato ga tu v podrobnostih ne opisujeva. Shematično je njegova postavitev prikazana na sliki 2, fotografija interferometra pa na sliki 5. Najpomembnejši pa je rezultat meritve, ki je reproduciran na sliki 6. Podobnost dobljenih rezultatov meritev z rezultatom interaktivne animacije na sliki 4 je očitna.



Slika 6. Velikost fluktuacij izmerjenega signala se periodično spreminja z naraščajočo razdaljo D med svetlobnima senzorjema – fotodiodama. Perioda (okoli 6 mm) je enaka razdalji med begajočimi (nevidnimi) interferenčnimi progami.

8. Sklep

Eksperiment in predstavljena multimedijska didaktična gradiva imajo namen osvetliti možnosti izvedbe in razlage interferenčnih poskusov z nekoherentnimi svetlobnimi izviri. Opisani pojav dodatno opisuje lastnost svetlobe, ki v različnih okoliščinah kaže svojo bodisi delčno ali pa valovno naravo. Delčne lastnosti svetlobe se izražajo pri interakciji svetlobe s snovjo, pri njeni emisiji in absorpciji. V prostoru med izvirom svetlobe in mestom absorpcije pa se svetloba vede kot valovanje, kjer se elektromagnetno polje, tudi táko, ki ga prispevajo različni fotoni, sestavlja po načelu superpozicije. Eksperimente, ki so sorodni zgoraj opisanemu, sva namreč izvedla tudi s svetlobo dveh neodvisnih laserjev [1 do 4]. Poskusi te vrste napeljujejo študente na razumevanje delovanja zelo dolgih velikih Michelsonovih interferometrov, ki jih gradijo za zaznavanje gravitacijskega valovanja in intenzitetnega zvezdnega interferometra.

LITERATURA

[1] I. Verovnik in A. Likar, *Fluktuacijski interferometer*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 3, str. 79–86.

[2] I. Verovnik in A. Likar, *A fluctuation interferometer*, Am. J. Phys. **56** (1988), str. 231–234.

[3] I. Verovnik in A. Likar, *Continuous fluctuation interferometer*, Am. J. Phys. **67** (1999), str. 354–356.

[4] I. Verovnik, A. Likar in J. Strnad, *Interfernz zweier Laser: ein neuartiges Schulexperiment*, Prax. Nat. wiss. Phys. **41** (1992), str. 20–24.

[5] L. Basano, R. Chittofrati, S. Crivello, E. Piano in C. Pontiggia, *Simple setup for detecting interference fringes produced by independent lasers*, Am. J. Phys. **65** (1997), str. 996–1000.

[6] F. Louradour, F. Reynaud, B. Colombeau in C. Froehly, *Interference fringes between two separate lasers,*, Am. J. Phys. **61** (1993), str. 242–245.

[7] I. Verovnik in A. Likar, *The Michelson interferometer – how to detect invisible interference patterns*, Eur. J. Phys. **25** (2004), str. 801–806.

TOMAŽ SCHARA

Tomaž Schara je leta 1987 diplomiral iz uporabne matematike na Oddelku za matematiko takratne *Fakultete za naravoslovje in tehnologijo*. Kmalu zatem je bil med soustanovitelji uspešnega podjetja *Hermes Softlab*. Študijsko se je izpopolnjeval na področju poslovodenja in je opravljal različne odgovorne poslovodne funkcije. Bil je celo direktor *Slovenskih železnic* (SŽ). Trenutna gospodarska kriza je, upamo, primeren trenutek za objavo pogovora z matematikom in uveljavljenim poslovnežem.

Tomaž, kako kot matematik in poslovnež gledaš[1] na današnjo gospodarsko krizo?

Kriza je pač neko svetovno dogajanje, proces. To je čas, ko se govori o krizi, o prelomu, o izginotju denarja. A denar ni izginil, denar je menjalna vrednost, energija, ki poganja ekonomski sistem. Trenutna situacija je posledica dejanske narave kapitalističnih ekonomskih odnosov. Poslovno trgovanje in komuniciranje se je delno zaustavilo. Denar ni izginil, le ugotovilo se je – kar naenkrat –, da ga imajo nekateri preveč in drugi premalo. V vsaki družbi so ljudje, ki zaslužijo malo in drugi, ki zaslužijo veliko, ter – kar ni vedno isto – eni, ki imajo malo, in drugi, ki imajo veliko. Prelivanje denarja vselej povzroča razmisleke o tem, kaj je pošteno in kaj ni in v kriznih časih postanejo nepoštenosti bolj opazne kot običajno. Ključna so vprašanja o vlogi politike, ki oblikuje sistem gospodarstva. Torej vprašanja, kaj so naloge zaposlenih in gospodarstvenikov na eni strani in kaj so obveznosti politike in nacionalnih vlad na drugi. Vlade naj bi oblikovale pravila gospodarskega obnašanja. Naloga politike je, da ščiti interes družbe kot celote in da izraža voljo ljudstva, ki naj bo širša in primarnejša od poslovnih interesov posameznika. Ne nazadnje davkoplačevalci z davki plačujemo tudi zaščito svojih in družbenih interesov ter pravic „malega“ človeka.

[1] Tikanje gre pripisati spominu na skupna študentska leta sogovornikov

Je današnja kriza drugačna od prejšnjih?

V današnji krizi se ne dogaja nič novega. Iste stvari zasledimo že v zelo starih knjigah. Npr. v Sun Tzujevi knjigi *Umetnost vojne*[2] , ki je stara že tisočletja, ali v Plutarhovem *Življenju velikih Grkov*, pa tudi v Machiavelliju in drugod. V jeziku starih Rimljanov bi tudi današnji konflikt lahko opisali kot konflikt državne administracije v Rimu na eni strani in vojskovodij na drugi, ki se s svojimi vojnimi uspehi vedno bolj oddaljujejo od centra oblasti. Podobno je danes v demokraciji in v modernem kapitalizmu: državna administracija, ki skrbi za komunalo (v najširšem smislu), je v veliki meri ohranila vlogo rimske države, vlogo vojskovodij pa so prevzeli gospodarstveniki, katerih osvajanja so nekoliko drugačna od tistih v rimskem času. V bistvu pa multinacionalna podjetja delujejo podobno, saj je glavni cilj večanje bogastva s hkratnim ustreznim obvladovanjem „osvojenih področij“. Investicije kapitala in inovacije so v marsičem podobne pohodom iznajdljivih vojskovodij, ki so s pohodi večali bogastvo in zaslužke. Včasih so vojskovodje nosili domov zlato in materialna bogastva, danes prinašajo dividende in druge vrste kapitalskih zaslužkov. V bistvu gre za zelo podobne procese. Trenutno je postalo jasno, da je treba nekatere stvari urediti drugače, da morajo vlade na nekaterih mestih drugače urediti pogoje dela in obveznosti svojih vojskovodij in ustrezno urediti in se odzvati na socialno nezadovoljstvo in pritiske. To je težka naloga. Poskrbeti je treba za dobre vojskovodje in ustrezno obvladati tiste preveč pohlepne. To se dogaja in je pomembno predvsem v velikih ekonomijah sveta. Mi smo premajhni, da bi zares lahko začutili te dileme. Seveda pa čutimo posledice in podobne igre v precej pomanjšani obliki. Mogoče celo preveč gledamo hollywoodske filme in včasih razmeroma majhne zgodbe napihnemo tako zelo, da povzročijo paniko.

Ampak za „male ljudi“ so lahko tudi posledice dogajanj, kot jih v Sloveniji poznamo pod blagovno znamko MIP, Mura, Prevent ali Istrabenz, precej kritične?

Seveda, posledice so za ljudi lahko pomembne. Smo „kontrabantski narod“ Martina Krpana, katerega povest veliko pove o „ponarodelih vrednotah“, o preživetju, ki je temeljilo na zvitosti, pametnosti in iznajdljivosti naroda. Povest nam govori o preživetju v teh rovtah s kontrabantstvom soli in ne

[2]Sunzi (tudi Sun Zi ali Sun Tzu): Umetnost vojne, (Sunzijeva načela vojskovanja). Knjiga je bila napisana v 6. stoletju pred našim štetjem. Že več kot 2000 let se knjiga uporablja kot izhodišče vojaške, poslovne in življenjske strategije (predvsem na Vzhodu). Slovenska izdaja (Mladinska knjiga, 2009) knjigo podnaslavlja: kitajska knjiga življenja.

peska. In kontrabantstvo je bilo narejeno na način, ki ga je celo cesar pozneje ovrednotil in izrabil v boju proti Brdavsu. To je seveda bolj mit kot resnica, a v zavesti ljudi je taka iznajdljivost vrednota. In še posebej v kriznih časih se ljudje vselej obrnejo k povečanemu iskanju koristi zase. In kdor pač lahko, to stori. Zato potrebujemo sistem, ki je pametnejši in pravičnejši, čeprav je težko definirati, kaj to pomeni. Krize so lokalna in globalna priložnost, da iz njih kot posamezniki in kot družba izidemo pametnejši. Pametnejši v smislu pametnejše distribucije dobrin, ki jih ljudje potrebujemo za življenje.

Poleg Bojana Dremlja, z njim smo objavili intervju pred leti, in še koga ... si v Sloveniji vsaj formalno najbrž med najbolje plačanimi matematiki. Se kot matematik po osnovni izobrazbi in kot poslovnež v svojem poklicnem življenju šteješ (tudi) za matematika?

Študij matematike sem vedno jemal zelo resno, to je zagotovo študij, ki je zelo fundamentalen, ki te nauči razmišljanja. Priznam pa, da že med študijem sebe nisem videl kot nekoga, ki bi živel za matematiko. Nikoli nisem čutil nagnjenja, poslanstva ali sposobnosti, da bi deloval predvsem kot matematik, niti ne kot raziskovalni matematik in tudi ne kot učitelj. V tem smislu bi bilo neprimerno trditi, da sem prvenstveno matematik. V petindvajsetih letih, odkar sem diplomiral matematiko, sem bil predvsem menedžer in podjetnik. Vedno pa sem čutil ne samo simpatijo, ampak tudi globoko hvaležnost do matematike in matematikov, h katerim sem „hodil v uk“, kot rad rečem. Od njih sem dobil svobodo, globino in širino razmišljanja. Pridobil sem sposobnost razmišljati zelo hitro v zelo kompleksnih prostorih - kot bi temu rekli matematiki. Ekonomisti razmišljajo drugače, kot da se sploh ne bi zavedali, kako zelo povezane in kompleksne so stvari. Mnogi ekonomisti in pravniki, ki zasedajo najpomembnejše državne in poslovne funkcije, so navajeni razmišljati zelo drugače. To so ljudje, ki nam v veliki meri krojijo usodo, so se pa v svoji izobrazbi večinoma učili stvari na pamet, od računovodskih standardov do pravnih aktov. Res je, v svojem poslovnem življenju ne potrebujem algebre ali topologije, ki sem se ju učil na fakulteti. Toda nisem se učil izrekov na pamet, saj s takim znanjem takrat ne bi naredil izpitov. Učil pa sem se sklepanja in razmišljanja, kar je pomembnejše od faktografije, ki se danes še posebej hitro spreminja. Škoda, da se z enako globino, kot se uči razmišljanja pri študiju matematike, ne uči razmišljanja tudi na bolj aplikativnih področjih. Gospodarski subjekti, gospodarske družbe so vpete v makroekonomski sistem, ki že davno presega lokalne nacionalne okvire. V teh kompleksnih sistemih je nujna sposobnost abstraktnega razmišljanja, ki zmore fleksibilno preskakovati z globalnega na lokalno in obratno. V tem kompleksnem in pogosto zelo abstraktnem svetu globalnih soodvisnosti je treba sprejemati hitre konkretne lokalne odločitve. Po znanem izreku je dober menedžer tisti, ki sprejme 65% pravilnih odločitev, opica, ki meče kocko, pa se pravilno odloči v 50%. Zato je meja med dobrimi in slabimi menedžerji zelo ozka. Kar se tiče zaslužka, pa je še posebej težko govoriti o sebi. V življenju sem bil za svoje delo zagotovo dobro nagrajen. Največja nagrada zame je bila to, da sem si v veliki meri lahko sam izbiral dejavnosti, ki sem jih opravljal. Finančno sem bil plačan tako, da mi je bilo omogočeno zelo dostojno življenje. Bila so tudi obdobja, ko je bilo težko, dovolj pa tudi takih, ko sem bil več kot zadovoljen. V smislu spodbude mladim bi vsekakor rekel, da je matematiko zagotovo vredno študirati, saj zahteva veliko, daje pa še veliko več in odpira številna vrata za raznolike priložnosti kasneje v življenju. Še posebej je ta študij primeren za mlade, ki so bolj „generalisti“ in ki niso usmerjeni zgolj v neposredno in konkretno. Seveda je pozneje v življenju neposrednega in konkretnega dela zelo veliko, a sposobnost generalizacije in širšega dojemanja je ključna.

Takoj po diplomi si postal podjetnik in soustanovitelj Hermes Softlaba. To je bil zelo uspešen projekt. V začetku ste bili med ustanovitelji štirje matematiki, Miro Germ, Pavle Knaflič, Rudi Bric in ti?

Ustanovitelji smo bili Andrej Kuščer in Zoran Zagorc, ki sta študirala elektrotehniko in računalništvo, ter Rudi Bric in jaz, ki sva bila matematika. Nekoliko kasneje sta se pridružila Miro Germ in Pavle Knaflič, oba matematika.

V poznih osemdesetih letih prejšnjega stoletja je Hermes Softlab poslovno blestel in prejemal raznolike nagrade od nagrade Republike Slovenije za poslovno odličnost do evropske Marshall Award leta 1998. Leta 1997 vas je Svetovni ekonomski forum celo razglasil za Global Growth Company v srednji in vzhodni Evropi. Kaj se je pozneje zgodilo s Hermesom?

Leta 1990 ali 1991 smo bili štirje. Takrat smo zajahali zlati čas razvoja izdelave specializirane programske opreme, ki se je iz podjetij, ki so prej imela svoje računalniške centre, začel seliti v specializirane računalniške institucije. Spremembe so se vrstile tako hitro, da so samostojno lahko sledila le večja podjetja, srednja in majhna pa so za računalniške potrebe začela iskati zunanjo pomoč. Zato so se začele pojavljati računalniške firme, ki so za naročnika izdelovale programsko opremo po naročilu. Mi smo bili takrat v čudoviti poziciji, saj smo že imeli ustanovljeno in utečeno firmo, ki je počela prav to, kar je trg potreboval. V začetku smo zmogli zagotoviti tudi potrebni kapital, da smo lahko zaposlovali in dosegli tako enormno rast. Takrat smo se vsako leto po številu zaposlenih več kot podvajali, pozneje pa smo se še kar nekaj let približno podvajali. Vse to je bilo mogoče, ker smo delali tudi za odlična tehnološka in finančna podjetja v Evropi in Severni Ameriki, pa tudi drugod. Od njih smo se učili ne samo tehnologije, temveč tudi zakonitosti poslovanja.

Naš takratni veliki uspeh je temeljil tudi na delu sistema *pobotov*, ki smo ga dobili in opravljali za takratno SDK[3] ali po domače za nove slovenske državne organe. Prej so za jugoslovanske državne organe to delo opravljali na Hrvaškem in tudi s sodelovanjem Beograda. Po razpadu Jugoslavije teh *poravnav* država Slovenija ni mogla več zaupati tuji državi, saj bi s tem dala v tuje roke preveč zaupnih gospodarskih informacij in celotno strukturo zadolženosti slovenskega gospodarstva. Takrat smo mi v *Hermesu* premislili in pripravili celoten sistem in ponudbo s programom in njegovim vzdrževanjem. Delo smo dobili tudi zato, ker je bila naša ponudba približno desetkrat cenejša od tiste, ki jo je slovenska SDK prej plačevala Hrvaški. To je bil za nas velik in pomemben projekt.

Za kaj je pravzaprav šlo pri teh poravnavah? Za optimizacijo in koordinacijo medsebojnih dolgov podjetji?

Da, šlo je za izdelavo sistema *pobotov* ali tako imenovanih *multilateralnih kompenzacij* pri poravnavanju medsebojnih dolgov podjetij. Matematično je šlo bolj ali manj za trivialnosti, ki smo jih rešili tako, da sem se jaz malo poglobil v knjige in našel uporabne povezave med linearno algebro in teorijo grafov. Glede na takrat relativno nezmogljive računalnike je bilo treba nekoliko paziti pri uporabi numeričnih metod, a tudi te stvari so bile v matematiki dobro obdelane. „Obračuni“ so morali biti opravljeni v eni noči, vključno s takratnim branjem podatkov s trakov. Program je našel „maksimum pobota“, ki je bil „enoličen“ in globalno maksimalen. „Pobot“ sam pa ni bil nujno enoličen, saj se je lahko absolutni pobot dolga različno razporedil med posamezna podjetja.

[3]SKD – Služba družbenega knjigovodstva je bila ustanovljena leta 1959. Leta 1994 jo nadomesti Agencija Republike Slovenije za plačilni promet, nadziranje in informiranje, ki se leta 1996 preoblikuje v Agencijo Republike Slovenije za plačilni promet(APP). Z letom 2002 pa nastaneta *Uprava Republike Slovenije za javna plačila in Agencija Republike slovenije za javnopravne evidence in storitve*, ki skupaj s poslovnimi bankami in Banko Slovenije koordinirajo in nadzirajo plačilni promet v državi.

Ta maksimalni pobot je pomenil, da se v mreži medsebojnih odnosov in dolgov izračuna dejanski absolutni dolg . . . ?

Da, tako se je ugotovil dejanski neto dolg in tudi sistem optimalnega poravnavanja dolgov med podjetji z vzajemnimi poravnavami. To je bilo tudi psihološko zelo pomembno za državo, saj se je šele po taki obravnavi spoznala dejanska zadolženost gospodarstva. Točna preglednost mreže vzajemnih dolgov je imela lahko tudi negativne in ne samo pozitivnih učinkov, a matematično operativni sistem, ki je državnim organom omogočal preglednost in lažjo koordinacijo, je bil postavljen.

Je torej začetni uspeh Hermesa delno pripisati tudi delu za SDK?

Delo in vir dohodkov, povezana s SDK, sta bila za Hermes pomembna posebej na začetku. To je bil zanesljiv, dokaj stalen vir dohodkov, ki je skupaj z drugimi poslovnimi odločitvami pomagal oblikovati uspeh podjetja. Predvsem nam je uspelo vzpostaviti dobro kadrovanje in zbrati solidno in vrhunsko znanje ter se oblikovati ne samo kot vodilna institucija, ki je podpirala bliskovit razvoj računalništva v tistem času doma, ampak smo svoje znanje zelo uspešno prodajali tudi v tujini. Podjetje je tako zraslo iz štirih zaposlenih na začetku na okrog 800 v povprečju zelo visoko izobraženih uslužbencev na vrhuncu svojih moči. Zagotovo smo bili eno največjih ali celo največje podjetje v devetdesetih letih glede na hitrost rasti in glede na visoko izobrazbeno raven. Za primerjavo bi omenil, da ima Klinični center v Ljubljani zaposlenih približno 800 zdravnikov (in seveda še nekaj drugih visoko izobraženih kadrov). Podobno velikih podjetij je najbrž še nekaj: Krka, Ljubljanska banka, . . . Če bi pri teh podjetjih primerjali delež izvoza, bi Hermes zasedel še bolj častno mesto.

Kaj se je zgodilo potem? Hermesova slava počasi zbledi . . . ?

Takrat sem se jaz tudi zaradi želje po večji iznajdljivosti v kompleksnem poslovnem svetu odločil za nadaljevanje študija menedžmenta, ki sem ga opravil na *Poslovni šoli Brdo*[4]. Večina predavateljev na šoli je bila iz tujine, predavanja so bila v angleščini; ta šola mi je omogočila nadaljnje in globlje poznavanje poslovnih konceptov, ki so bili v tujini razviti že mnogo prej. Študij je potekal predvsem na podlagi analize konkretnih primerov, to je tako imenovani „case study“. Poslovanja Hermes Softlaba takrat ni omejeval niti trg niti naše ambicije ali pomanjkanje sposobnega kadra. Širili

[4]Današnji IEDC (International Executive Development Center) – Poslovna šola Bled. Poslovna Šola Brdo je bila ustanovljena leta 1985 na pobudo Gospodarske zbornice Slovenije. Leta 2000 se šola preimenuje v IEDC in se z Brda pri Kranju preseli na Bled.

smo se na vse strani, odpirali smo svoja podjetja v tujini, ampak glede na naravo kapitalskega trga nam je primanjkovalo predvsem denarja za takšno rast. Potrebe in poslovni načrti so zahtevali velike vložke kapitala, ki jih kljub dobremu zaslužku v podjetju, ki je pred nekaj leti začelo iz nič, še ni bilo. Zato se je takrat začelo ne samo bančno zadolževanje, ampak smo se začeli ozirati tudi po novih investicijah lastniškega kapitala. Procesi takega iskanja investitorjev pa so bili v majhni Sloveniji, kjer smo bili edino podjetje te vrste, negotovi. Podobni procesi v Silicijevi dolini so lahko veliko bolj načrtovani, saj je tam veliko takih podjetij, veliko investicijskega kapitala, ki išče ustrezne priložnosti, in tudi veliko ustreznih revizorjev, ki so sposobni taka podjetja preveriti in oceniti. Skratka, tam je na voljo vsa korporativno-finančna infrastruktura, ki omogoča normalno nadaljnjo rast uspešnega podjetja, seveda v različnih lastniških oblikah. Mi smo takrat po vso to pomoč morali čez mejo in zato je bil to relativno naporen in tudi drag proces, ki je trajal kar nekaj let in se je (uspešno) končal predvsem z različnimi bančnimi dokapitalizacijami. Pomagale so tuje banke, kot npr. Nomura[5], ki je ena največjih investicijskih bank v svetu, pa nekaj angleških privatnih skladov, od naših Ljubljanska banka, Zavarovalnica Triglav in druge institucije. Ta proces nam je vzel nekaj energije, a glede na naravo poslovanja je bil nujen, saj smo bili sicer zaradi pomanjkanja kapitala obsojeni na ustavitev rasti. Podjetje je kot živ organizem in narava poslovanja danes je taka, da se stvari hitro spreminjajo. Podjetja, ljudje in ideje hitro odhajajo in prihajajo in se odzivajo na globalne in strateške poslovne tokove. Mogoče bi bil Hermes Softlab danes uspešnejši, če ne bi leta 2000 prišlo do relativno močnega borznega zloma prav v IT sektorju, po katerem so se bančni lastniki obnašali precej drugače, kot bi se podjetniki z lastnim denarjem.

In je prišlo do disperzije lastništva ...

Ja in po mojem mnenju se je takrat začelo preveč konzervativno upravljanje, ki se na področju IT ni obneslo.

Ste prvotni lastniki in ustanovitelji podjetja lastniško in poslovno v Hermes Softlabu še kaj prisotni?

Jaz sem podjetje zapustil leta 2000, ker sem imel druge načrte in ideje. Nekateri drugi so ostali. Smo pa vsi prvotni lastniki dokončno odšli iz

[5] *Nomura* koropracija in banka je ena večjih industrijskih in finančnih družb na Japonskem in v svetu. Ustanovljena leta 1919 je prerasla v veliko investicijsko banko, ki deluje v vseh večjih finančnih centrih sveta.

podjetja leta 2008, ko je regijski strateški investitor kupil podjetje, se pravi vse delnice.

Po Hermesu si direktoroval v raznih podjetjih?

Po Hermesu sem najprej delal v hčerinskem podjetju Hermesa. Šlo je za poskuse, da bi se Hermes povezal s konzultantskimi hišami. V igri je bila neka švicarska konzultantska firma, ki pa jo je pozneje kupil Deloitte & Touche[6]. Za Hermes je zato posel postal nezanimiv in s kolegi, ki smo delali v tej skupini, smo se odločili, da podjetje, ki ga je Hermes želel prodati, kupimo in nadaljujemo z razvojem konzultantsko-svetovalne firme, ki bi podjetjem pomagala na področju IT. Nastalo je podjetje *Bi-solutions*. Zaradi majhnosti slovenskega trga smo se po obsegu zelo omejili in se posvetili manj tehnološki in bolj poslovni plati poslovanja. Vse bolj pa me je zanimalo delo v upravah podjetij, kjer delo ni samo „abstraktno svetovanje“, ampak ima človek tudi pooblastila in direktne odgovornosti. Tako me je pozneje pot vodila do formalnih funkcij direktorja ali finančnega direktorja v podjetjih, ki so se tako ali drugače znašla v kočljivem stanju. Naj ob tem omenim, da se mi je vedno zdela združena funkcija direktorja in finančnega direktorja v podjetjih malce „incestna“, saj gre za dve v marsičem nasprotni funkciji. Upravni direktor mora biti vizionar in strateg, finančni direktor pa mu drži zrcalo realnosti. Pogosto v poslih prav strah pred odločitvami, ki niso lahke, pripelje podjetje v brezupno situacijo stečaja. Posredi so lahko tudi drugi, pogosto skriti interesi. V poslih je treba biti matematično racionalen. Podjetje se rodi, živi in umre – to je normalen proces. Le zakaj bi umrlo danes, če lahko umre šele jutri ...

Ali po rojstvu česa novega ...

Da, ali po rojstvu česa novega, kar je realno. Mnoga podjetja dosežejo neko stanje, v katerem taka, kot so, ne morejo več preživeti. Lahko se pa iz njih razvijejo nova in pogosto s tem podjetje dopolni svoje poslanstvo in potem lahko umre.

Bil si celo direktor podjetja Bori, ki se je ukvarjalo s kmetijsko mehanizacijo?

To je bilo eno izmed podjetij, ki sem ga pomagal rešiti. Njihov osnovni adut je bilo varilstvo. To je na videz zelo preprosta zadeva. Tehta in meri se „varjene materiale“ in cene za to delo so znane povsod po svetu. V podjetju Bori

[6] Deloitte & Touche, ali le Deloitte, ustanovljena leta 1845, je ena največjih svetovnih svetovalnih firm, ki po vsem svetu zaposluje več kot 150 000 ljudi in ima letni prihodek skoraj 30 miljard dolarjev.

so imeli tehnologijo varjenja dobro razvito. Preprosto povedano: računalniške načrte za varjenje so tako prilagodili, da so korigirali termične vplive varjenja in je bil „output“ in ne „input“ točno po načrtu. Osnovne načrte so točno in premišljeno „pokvarili“ ravno toliko, kolikor so iz lastnih tehnoloških izkušenj vedeli, da jih bodo termične spremembe varjenja ukrivile. Šlo je predvsem za varnostne kabine traktorjev in težkih terenskih delovnih strojev, ki so zaradi tako premišljenega dela šele po ohladitvi po končanem varjenju natančno ustrezale načrtom. S tako preprosto inovativnostjo in tehnično spretnostjo jim je uspelo dosegati boljše rezultate končnega izdelka kot marsikateremu tehnološko zelo izpopolnjenemu in robotiziranemu konkurenčnemu obratu. Pogosto v podjetjih opaziš, kako pomembna je iznajdljivost in široko razumevanje celotnega procesa. Pravzaprav gre za nekakšno sposobnost sistemskega, jaz mu rečem kar matematičnega razmišljanja.

Bil si med kandidati za direktorja Univerzitetnega kliničnega centra, pa direktor SŽ. Gre vendar za tako različna področja; je upravljanje kljub vsemu zelo podobno ne glede na veliko različnost dejavnosti?

Pri vodenju podjetja je, neodvisno od področja, treba biti skromen oziroma spoštljiv do področja dela. Namreč, ko prideš do konkretnih problemov področja, neodvisno za katero gre, je vedno najboljši tisti, ki se s tem profesionalno že dolgo ukvarja. Morebitna menedžerska nadutost se zagotovo ne obnese. Je pa pri vodenju podjetja in pri delu z ljudmi mnogo generičnih, večnih resnic in pravil. Psihologija in sociologija dela z ljudmi se malo spreminjata in sta enaki, kot lahko vidimo v že zelo starih knjigah. Saj gre za nekakšen zgodovinski razvoj, a „bistvena nit“ ostaja ista. Metodologija in sistem dela z ljudmi sta od praveka enaka. Dobro vodenje pomeni zmožnost povezati pravi tim specialistov in generalistov v podjetju v sistemsko skladno delujočo celoto. Pogosto se uspešna pot poslovneža ali podjetja ne začne pri velikih projektih, ampak čisto na začetku pri neki poslovni ideji ali inovaciji, okrog katere se zberejo ljudje s primernimi dopolnjujočimi se specialističnimi in generalističnimi pogledi. Od ideje do tržne uspešnosti je seveda dolga pot. Danes lahko vsakdo, tako potrošnik kot poslovnež, izbira med mnogo dobrimi izdelki, in zakaj bi izbral ravno tvojega? Zato samo ideja ali dober izdelek nista dovolj. Tu postanejo najpomembnejša generična pravila, ki so precej neodvisna od specifičnosti dela v nekem podjetju in so vezana na splošna načela poslovanja in upravljanja.

Pred tvojim direktorovanjem v SŽ in po njem se je zamenjalo že nekaj di-

rektorjev. Tvoj naslednik je bil po osnovni izobrazbi fizik, Matic Tasič. Tudi on je medtem že odstopil. V upravljanju podjetja, kot so Slovenske železnice, bi še posebej morala prevladovati dolgoročna vizija in ne kratkoročni (politični) interesi ...

Žal so pri teh zadevah pomembnejše menjave slovenske vlade kot pa dolgoročni interesi ali nacionalne vizije. Upravljanje takega podjetja, ki je v lasti državljanov Republike Slovenije, je zaradi mnogih razlogov in interesov težko. Globalno gledano bi z dobrim dolgoročnim poslovanjem SŽ zagotovo lahko izkoristili svojo strateško geografsko lego in hkrati ohranili razmeroma neokrnjeno naravo, veliko gozdov in pitne vode. Na teh premisah bi se v moderni Evropi zagotovo dalo zgraditi moderno in uspešno logistično strukturo, v kateri bi železnica imela ključno vlogo. Da se izrazim v paraboli in s simboliko znanih mitov, da bi lahko kot Martin Krpan tovorili sol in ne kamenja. A za to ne bi potrebovali več premisleka, premisleki so bili že večkrat narejeni, potrebovali bi resne in odgovorne odločitve ter strokovno ekipo, ki bi to lahko speljala, ne ozirajoč se na razmeroma kratke cikle vedno novih političnih vlad. Vlade se zamenjujejo vsake štiri leta, medtem ko železniški sistem potrebuje razvoj in vlaganja, ki jih ni mogoče celovito izpeljati prej kot v desetih ali dvajsetih letih. V Švici so se na primer lastniki železnic, to je državljani, na referendumu odločili, kaj od železnic hočejo in pričakujejo. Postavili so pravno, kadrovsko in finančno strukturo, ki je to lahko izpeljala. Pa tudi tam imajo težave. Švicarski tovorni železniški promet je zabredel v četrt milijardne izgube. Naše menjave vodstva SŽ na vsake pol leta, milo rečeno, niso produktivne.

Neproduktivne? Neresne?

Najbrž so povsem neresne. A po svoje so razumljive. Na državnem nivoju sploh nimamo jasne strateške odločitve, kaj hočemo. Taka ključna nacionalna strategija bi morala biti sprejeta v parlamentu, če ne celo potrjena na referendumu.

Kdaj bo Slovenija imela vlake, ki bodo vozili s hitrostjo 300 km/h?

Narejeni so osnovni načrti, po katerih bi vlaki vozili s hitrostjo 160 km/h, in to bi bilo dovolj za rešitev vseh ključnih problemov, ki se nanašajo na hitrost. Danes je povprečna hitrost tovornega prometa 25 km/h, potniškega pa 50 km/h. Dvotirni pretočni promet z vso potrebno moderno opremo, ki omogoča večjo frekvenco vlakov, kot jo imamo danes, bi pri hitrostih 160 km/h povsem zadoščal. A to so strateška vprašanja. Tak železniški promet bi omogočal veliko večji prevoz tovora na račun ceste. Cestni lobi je pa zelo močan. Če je na celotni železnici zaposlenih 10 000 ljudi, jih je samo v kamionskem prometu zaposlenih več kot 60 000 (imamo 60 000 tovornjakov). Celovit državni razvoj bi zahteval tudi ekološko obnašanje in preusmeritev tovornega prometa na železnico. Obenem je z železnico in s frekventnimi vožnjami vlakov mogoče ustvariti drugačen, bolj ekološki način življenja, ko ljudje lahko živijo na bližnjem podeželju in se z vlakom vsak dan vozijo v službo. A vse to bi zahtevalo strateško načrtovanje in dolgoročne gospodarske načrte. Tako pa se, poleg zelo neekološkega obnašanja, drenjamo in pobijamo po cestah. Tudi če bi s hitrostjo 160 km/h prišli do Dunaja ali Benetk, od koder bo kmalu mogoče potovati s hitrostjo 300 km/h, bi bilo to povsem v skladu z modernimi železniškimi standardi. Ne smemo namreč pozabiti, da je Slovenija zelo hribovita in da po takem terenu tudi drugod vlaki ne vozijo s hitrostjo 300 km/h. Vsekakor nas čaka cikel okrog petnajstih let, da se bomo vsaj na osnovnem nacionalnem križu vozili s času primernimi hitrostmi in standardom. Problem bo tudi izgradnja ljubljanske železniške obvoznice za tovorni promet.

Kot si omenil, doštudiral si MBA[7] na Poslovni šoli Brdo?

Takrat sem razmišljal, kako bi nadaljeval poslovni študij. Razmišljal sem o možnostih na Ekonomski fakulteti, pa tam zame ni bilo primernih možnosti. Glede na moje poslovne izkušnje pri Hermesu in načrte pri Softlabu je bil študij MBA ob delu zame najprimernejši. Študij mi je dal angleško izrazoslovje in tista znanja, ki sem jih potreboval. Seveda bi bilo za moje potrebe krasno, če bi bil lahko že med študijem matematike pridobil nekaj teh mejnih znanj, ki se bolj vežejo na ekonomijo.

Danes imamo na Fakulteti za matematiko in fiziko zelo popularen študij finančne matematike.

To je vsekakor dober razvoj. Vsi resni ekonomisti, s katerimi sem kdaj govoril po svetu, pravijo, da danes resen študij ekonomije brez zelo temeljitega znanja matematike ni mogoč. Sam menim, da nekaj osnovnega vedenja o poslovanju dandanes potrebuje vsak človek, tako tudi raziskovalni matematik ali učitelj. Zato res ne bi bilo napak, če bi nekaj osnov poslovanja, ekonomije in organizacije dela spoznal vsak študent, še posebej tako celovitega in resnega študija, kot je študij matematike.

[7] MBA iz angleščine *Master of Business Administration*

Sta ti študij in diploma MBA pomenila vir novih poslovnih znanj ali predvsem vstopnico v poslovni svet?

Meni je takrat zagotovo primanjkovalo poslovnih znanj, ustrezne terminologije in tudi teoretičnega poznavanja poslovnih zakonitosti. Tu gre za terminologijo tudi v vsebinskem pomenu. Podobno kot v matematiki, ko najprej postavimo natančno izrazoslovje, definicije in izreke, da točno vemo, o čem sploh govorimo, je tudi v poslih ustrezna terminologija šele dober začetek. Ti temelji so ključni za začetek jasnega komuniciranja na vsakem področju, ne samo v poslovanju. Seveda se šele v nadaljevanju pokaže, kdo poleg terminologije razume in obvlada tudi vsebino. Sicer pa diploma MBA formalno nikakor ni bila vstopnica nikamor. Nikoli me ni nihče pogojujoče vprašal, kaj sem študiral, v poslih je pomembno, kaj znaš pokazati. Vselej pa se je poslovnim ljudem zdelo zanimivo, da sem se šolal kot matematik. Sicer se pa nikoli v poslih nisem skliceval na svoje diplome, niti nisem uporabljal svojih nazivov, ne spredaj ne zadaj (nasmeh).

Kako bi komentiral mnenja, da je stil ameriškega MBA poslovneža kriv za današnjo finančno in gospodarsko krizo?

Seveda ima vsakdo pravico imeti svoje mnenje. Moje mnenje je, da so taki pogledi na vzroke krize zelo poenostavljeni in brez argumentov. Vzroki za krizo in prerazporejanje bogastva so tektonski premiki v trendih svetovnega gospodarstva. Če na razvoj pogledamo časovno in geografsko globalno, brez dvoma ugotovimo, da je bil na svetu narejen napredek, kar se tiče kvalitete življenja (ne le preživetja). Čeprav je nepravičnosti še veliko, se (globalno gledano) socialne razlike manjšajo. Tudi na vseh drugih za življenje ljudi pomembnih področjih, kot so prehrana, izobraževanje, zdravstvena nega, delovne razmere, ... se stvari izboljšujejo. Seveda pa prihaja do kriz in občasnih težav, kot je trenutna kriza, a to je narava človeškega razvoja. Ne more iti vedno le na bolje, in to za vsakega izmed nas in ves čas. Verjetno nas marsikaj nepredvidenega, predvsem na Zahodu, še čaka. Zakaj bi namreč vsaka slovenska družina imela lepo hišo, skoraj vsak Slovenec udoben avto, za Kitajce pa naj to ne bi veljalo? Pri hrani so razlike še večje. V Sloveniji in na Zahodu iz supermarketov vozimo polne vozičke hrane in najrazličnejših izmišljotin potrošniške družbe, medtem ko marsikje v Afriki nimajo niti najosnovnejšega. Tu nas, če se ne bomo znali globalno kot družba obnašati bolj racionalno, čakajo še mnogi pretresi. Ali so za to krivi (ameriški) MBA-jevci? Ne vem, nekateri izmed njih zagotovo nosijo krivdo za posamezne napačne odločitve. Najbrž predvsem tisti, ki so v pohlepu prestopili rubikon[8] legalnih in moralnih norm.

Med ljudmi se postavlja prav to vprašanje meje med odgovornostjo in etiko v poslovanju, kjer se zdi vse mogoče in dopustno, kjer je kljub tisočem predpisom vselej tudi prostor za bolj ali manj očitne prevare, ki so pogosto po črki zakona legitimne, po etiki pa primitivne, brezobzirne in zgrajene le na pohlepu po denarju.

Seveda, med ljudmi na vseh področjih so vselej bili, so in tudi bodo prevaranti. Bistvo MBA šol so „case studies“; teorija predstavlja le kakih 15% študija, vse drugo je obravnava konkretnih primerov v skupinah, kjer se študenti učijo spoznavati kompleksnost ne samo problemov, ampak tudi usklajevanja, pogajanja in doseganja soglasij v skupinah. Nekateri so ali jih pač splet okoliščin oblikuje v agresivce, če že ne morilce. Taki „morijo“ že v študijskih skupinah in najbrž tudi pozneje v poslovnem ali siceršnjem življenju. A tu je ključna vloga države s pravom in zakonodajo. Zakoni in sankcioniranje države bi morali slediti splošnim moralnim normam. Država bi morala družbo regulirati tako, da bi obenem omogočala ekonomski napredek in hkrati zagotavljala pravičnost in enake možnosti za vse. Enake možnosti za vse je seveda politična floskula, ki lahko pomeni kvečjemu enake možnosti v startu. Te enake možnosti potem ljudje glede na svoje sposobnosti seveda različno izkoristijo. Pravni sistem ne bi smel biti nič drugega kot dogovor med ljudmi, kaj je prav in kaj ne. In tu je država s svojim formaliziranim pravnim sistemom v mnogočem popolnoma odpovedala. Človeška narava je taka, da gredo mnogi do roba in tudi čez. Vloga regulative je, da te ljudi opozori, da so se robu približali in da jim ne pusti, da ga prestopijo.

Na boljših MBA šolah imajo tudi poslovno etiko in bodoče poslovneže ne učijo samo, kako neopazno priti do roba in čez, ampak tudi, kaj je v poslo-

[8]Rubikon, reka v starem Rimu, ki jo je bilo po rimskem pravu prepovedano prečkati rimskim vojskovodjem in njihovi vojski (ob povratkih z osvajanj). Zakon naj bi ščitil Rimsko republiko pred vojaškim udarom. Reko je leta 49 pred Kristusom prečkal Julij Cezar s svojo vojsko in s tem začel upor in državljansko vojno pred svojim pohodom na oblast. Po tem dogodku se je v svetovnih jezikih ohranil pomen „prečkati Rubikon“ kot prestopiti mejo, od koder ni več povratka. Danes, zaradi sprememb tokov rek v tem delu, ni povsem jasno, za katero reko je šlo. *Rubicone* naj bi bila komaj 30 km dolga reka od Apeninov do Jadranskega morja, in sicer v južnem delu dežele Emilia-Romagna, z izlivom med mestoma Ravena in Rimini. Na istem področju danes tečeta majhni reki *Uso* in *Fiumicino*. Slednja se v zgornjem delu razdeli v *Pisatello*, *Rugone* in *Plusa* (ali *Fiumicino*). Izliva rek Uso in Fiumicino sta le nekaj kilometrov narazen in ulice na gosto poseljenih obrežjih ob obeh vodotokih nosijo ime Via Rubicone. Nekoliko v notranjost ob vodotoku *Fiumicino* je tudi manjše mesto z imenom *Savignano sul Rubicone*.

vanju etično sprejemljivo in kaj ne ...

Zagotovo, na MBA šolah nikjer ne učijo nelegalnega obnašanja. Uči se predvsem to, kako narediti največ, kar je možno glede na legalne okvire.

Da, ampak vsega ni mogoče zregulirati. Vedno obstaja še človeška odgovornost in odločitev. Morala.

Ja, zato res na mnogih šolah učijo tudi poslovno etiko. A tu se ne more zanikati tudi pomena širšega okolja, to je odnosov in etike v družbenem in še posebej v družinskem okolju, kjer je nekdo odraščal. Kako se oblikuje etično obnašanje posameznikov, je odvisno od kompleksnega spleta okoliščin, od družine in osnovnega izobraževanja do vrednot družbe. Seveda je vprašanje, koliko je v procesu celotne vzgoje uspelo v človeku vzbuditi čut in svetopisemsko odgovornost, da nikar ne počni drugim tistega, kar ne bi rad, da počnejo drugi tebi.

Kako komentiraš zahodnjaško doktrino razvoja, ki govori o 2–3 odstotni gospodarski rasti kot o idealni stopnji rasti. Je razumno in odgovorno idealni dolgoročni napredek definirati kot „eksponentno funkcijo“?

To so temeljne filozofske in civilizacijske debate. Gotovo na Zemlji živimo z določenimi zgornjimi mejami: koliko hrane lahko pridelamo, koliko ljudi lahko preživimo. Mogoče pa je, da so te meje dejansko drugačne, kot se nam zdi. Kdaj bo na primer zmanjkalo nafte, čez 10, 50 ali 100 let, je najbrž nemogoče napovedati. A energije, če bi jo znali uporabljati, je veliko. Navsezadnje, središče Zemlje je vroče in polno energije, Sonce je v primerjavi z nafto na Zemlji skoraj neskončen vir energije. Tudi razmišljanja, kako ta rast na dolgi rok ne more zdržati, so vprašljiva, saj glede na inflacijo in siceršnje ekonomske procese ni povsem jasno, kaj v smislu nekega dolgoročnega razvoja dejansko pomenijo. Pomembnejši od same stopnje rasti je dejanski razvoj, ali preprosto vprašanje, kaj je danes bolje, kot je bilo včeraj, in kam svet dejansko gre.

Ali nas moderni potrošniški razvoj ne sili prav v to, da vedno več trošimo, ne da bi se ob tem imeli bolje ... Na Kitajskem menda že dolgo ni več lakote, a po nekaterih podatkih na prebivalca porabijo tudi do štirikrat manj hrane kot na Zahodu. Ali bolj natančno, na Zahodu v primerjavi s Kitajci zavržemo tri četrtine hrane. Če od hrane preidemo na najrazličnejši potrošniški kič, naj bi na Zahodu tega proizvedli in niti ne porabili – saj ga je porabiti nemogoče – ampak ga le čez čas zavržemo, deset do stokrat več

kot v revnejših deželah. Razvoj gre v smer, da bi vseh šest milijard ljudi porabljalo enako, kot počnemo zahodnjaki. Lahko to Zemlja zdrži?

Obstajajo meje. Kako se bo ves sistem samo – reguliral, da bo ostal znotraj možnega, nihče ne ve. Upajmo, da bomo zmogli nekako „zvezno razviti modrost in odgovornost“, da bi lahko odpravljali družbene probleme, sicer bo pač prišlo do „singularnosti“. Upam, da bomo zmogli toliko pameti, da se bomo znali tudi odreči stvarem, ki dejansko nič ne pomenijo. Ko pride pravi čas, ne bo nič lažjega, kot se odreči kupovanju stvari, ki niso nič vredne ali so nam celo v breme. Saj pogosto kar nekaj kupujemo le zato, ker lahko, in sploh ne vemo, zakaj ...

Verjameš torej, da se bomo zahodnjaki pripravljeni odreči privilegijem potrošništva tudi brez hujših pretresov?

Mislim, da je del te pripravljenosti vedno bil in da ga je čutiti tudi sedaj. Banalno konzumiranje je kljub vsemu vedno manj samo na sebi vrednota. So obdobja, ko je v nekaterih predelih nujno imeti nekatere stvari, a minejo. V Ameriki so bila obdobja, ko je bilo nujno imeti konja in pištolo. Konj že ni več nuja, upajmo, da tudi pištola kmalu ne bo več. Čez nekaj časa ljudje ugotovijo, da jim je en televizor povsem dovolj, čez čas pa mogoče celo, da jim je še ta odveč.

Imaš otroke?

Hči bo imela 18 let. Rojstni dan bosta praznovali skupaj z našo mačko, ki bo imela 20 let. Z ženo se poznava še iz gimnazijskih let. Je uspešna in priznana kirurginja ... ja, imam prijetno in urejeno družino.

Kako bi kot poslovnež uredil šole, da bi se naši otroci v njih dobro počutili in se obenem v njih primerno pripravili na življenje?

Zase vem, da sem v življenju šel skozi obdobja, ko sem si želel, da bi bil lahko hodil v drugačne šole. Ob odraščanju hčere sem na šolanje seveda pogledal še drugače. Če pod vsemi svojimi pogledi na šolanje potegnem črto, mislim, da bi formalno šolanje v začetku človekovega življenja moralo dati predvsem uravnotežen pogled na najbolj temeljne stvari. Tega seveda mlad človek ne more razumeti ali ceniti. Poleg tega naj bi šola mlademu človeku dala tudi nekaj osnovnih pragmatičnih veščin, ki pozneje lajšajo vsakdanje samostojno življenje. Kakšno je pravo razmerje fundamentalnih razmislekov o življenju in pragmatizma, ne vem. Najbrž je tudi pri vsakem človeku nekoliko drugače. A v pravem odnosu med tema dvema poloma je zmagovita formula, ki naj bi človeku pomagala k uspehu. Šolski sistem, ki ljudi nauči primerno misliti in ustrezno ukrepati, je dober. Če pomislim na šole, skozi katere sem šel sam, menim, da so bile zelo dobre. Ne pravim, da danes ni tako. Ne vem. Iz tega, kar sem videl pri hčeri, lahko sklepam, da so tudi danes naše šole povsem solidne. Tudi uspešnost Slovencev doma in po svetu potrjuje, da nimamo slabega šolskega sistema.

Je otrokom, kot je tvoja hči, ki odraščajo v družinah zelo uspešnih staršev, pozneje v življenju težko? Po eni strani imajo solidno startno pozicijo, po drugi strani pa je verjetnost, da bi se taki otroci s svojim delom in sposobnostmi ponovno prebili med elito najuspešnejših, majhna. Ni pričakovanje, da bi se uvrstili med elito, kar so dosegli starši, za take otroke frustracija?

Na splošno najbrž to drži. Sam se te nevarnosti ne bojim. S soprogo Karin sva v življenju nedvomno bila uspešna, tako da sva svoji hčeri dala tudi solidno in varno okolje v otroških letih, da bo lahko pozneje v življenju z marljivim delom dosegla tisto, kar bo želela. Ne verjemem, da sva z ženo prišla v tako ozek krog uspešnih, da bi bil podoben uspeh za hčerko nemogoč. Bolj bistveno je, da dobi otrok temeljne vrednote in varnost. Prej sva govorila o krizi in o Ameriki, kjer je do krize najprej prišlo. Mislim, da ima Amerika zelo zdrav odnos do dedovanja. Tam imajo namreč zelo visoke davščine na dedovanje. Veliko višje kot v Evropi. Mislim, da celo več kot 50 odstotkov. Otroci na primer tako bogatih ljudi, kot je Bill Gates, niti ne morejo podedovati tako velikega premoženja, saj morajo davke plačati v denarju, medtem ko dedujejo delnice. Če bi pri tako velikih zneskih dedič začel prodajati delnice, da bi poplačal davke, bi le-tem vrednost tako padla, da bi bankrotiral. Nekje sem bral, da taki bogataši od vseh silnih milijard dolarjev vrednega premoženja ponavadi otrokom zapustijo le nekaj deset milijonov za dober start. In to je to.

No, nekaj deset milijonov dolarjev je že zajetna vsota in gotovo se da bogastvo že prej transformirati tako, kot želi lastnik!?

To je res, a ponavadi tako bogati ljudje upravljajo z denarjem prek skladov in seveda je koristnik ugodnosti lahko tudi otrok. Zanimivo pa je, da ko so želeli v ZDA visok davek na dedovanje zmanjšati, da bi bil primerljiv z evropskim, so najbolj nasprotovali največji bogataši na čelu z Warrenom Buffettom[9] , ki je osebno lobiral v senatu, da so ohranili visoko stopnjo obdavčenja dediščine.

[9]Warren Edward Buffet, leta 1930 rojen vpliven ameriški poslovnež, je eden najbogatejših zemljanov in med največjimi darovalci različnim dobrodelnim organizacijam. V letu 2008 je bilo njegovo bogastvo ocenjeno na več kot 60 milijard dolarjev.

S kakšnim motivom?

Američani so drugačni od Evropejcev. Oni uživajo, da so uspešni, da delajo denar. Ni pa denar končni cilj. Ko ga ustvarijo, ga veliko bolj radodarno kot Evropejci vračajo v skupnost v obliki donacij. Imajo podjetja, ki se ukvarjajo z donacijami, prek katerih seveda širijo svoj vpliv, a je obenem etika politike donacij zelo dodelana in pri vsej stvari temeljna.

Kako pomembne so v poslovni uspešnosti sposobnost, trdo delo, ambicije, socialne spretnosti, sreča?

Mogoče sva še kaj izpustila, a to so ključne vrednote pri vsakem in seveda tudi pri poslovnem delu. Pri poslovodenju je mogoče še posebej pomemben občutek za medčloveške odnose, saj ne gre drugače, kot da ljudi vodiš, da ti zaupajo, da jih znaš prepričati in pridobiti.

Kaj počneš v prostem času? Ga kaj ostane?

Predvsem v vmesnih obdobjih, med različnimi projekti je nekoliko več časa. Takrat rad smučam, kolesarim z gorskim kolesom, igram tenis, jadram ... V hujših časih, ko je veliko dela ali ko se kot poslovnež znajdeš s podjetjem v težki situaciji, takrat je od zore do mraka ena sama skrb in delo in tudi noči so pomešane z blodnjami o nujnih odločitvah. Takrat se za šport namesto stereotipnega golfa poslovnežev (nasmeh) ponoči zbujaš moker od skrbi, kje boš zbral denar za naslednjo plačo zaposlenih.

Kdaj kaj prebereš?

Rad posežem po starih klasikih, kot je že omenjeni Sun Tzu. Zgodovina se namreč ponavlja. Sprotne novice spremljam selektivno, ker so le redke pomembne. Bistveni zgodovinski procesi se dogajajo počasi in človeštvo se le počasi spreminja na bolje. Ko sem prost, rad berem, da zaposlim možgane. Rad berem tudi pol-strokovno literaturo. *The Economist*[10] ponavadi preberem vsak teden. Leposlovje berem v bolj sproščujočih časih, kot so počitnice. Rad posežem po literaturi, ki ima bolj filozofsko noto ali prikazuje kak nov pogled na svetovno dogajanje.

Pred 25 leti sva skupaj gulila študentske šolske klopi. Jaz jih po svoje, prenovljene, še vedno. Vsakdo se nekam uvrsti na socialno lestvico in ponavadi gleda navzgor z zavistjo. Če jaz razmišljam o svoji karieri, me marsikdo

[10] The Economist je londonski tednik, ki izhaja od leta 1843. Je eden najbolj vplivnih svetovnih časopisov za mednarodno politiko in ekonomijo, ki izhaja v preko 1,3 milijona izvodih.

zagotovo vidi kot uspešnega. Sem učitelj na ugledni fakulteti ljubljanske univerze, rad imam svoj poklic, pa so vseeno trenutki, ko bi bil rad kdo drug in kje drugje. Splošno socialno gledano si ti še veliko uspešnejši od mene. Moja in tvoja poklicna pot sta precej različni. Zase dobro vem, kaj imam in česa imaš ti več. Si ti tudi poklicno želiš biti kdo drug in vsaj včasih kje drugje? Česa si želiš? Ti v poklicu česa primanjkuje?

Nedvomno so v poklicu vsakogar trenutki, ko je težko. Z leti se na težke stvari navadiš, ker se ti ne dogajajo več prvič in niso videti več tako grozne. Veš tudi, da za dežjem posije sonce in da se v gospodarstvu cikli menjujejo. Veš, kaj je treba storiti in kam usmeriti svoje sile, da bi lahko pričakoval izboljšanje. Želim si zanimivih projektov, kjer bom lahko produktivno in uspešno delal. Gotovo se bodo z leti moje vloge spreminjale. Glede bolj zasebnih oziroma človeških želja mislim, da sem se leta 2000 pravilno odločil, ko sem se zavestno odrekel pretiranim službenim potovanjem. Zato sem tudi zapustil *Softlab*. Želel sem biti bolj navzoč pri odraščanju hčere. To so bila za našo družino ključna leta v osebnem in poklicnem smislu. Človek mora pač vedeti, kaj si poklicno in tudi intimno želi in oboje smiselno združiti. Čisto vsega pač ne moreš imeti. To, da se moraš kot drugi drenjati v običajnem avionu za „business“ ali celo za „economy class“, medtem ko se „najpomembnejši poslovneži“ vozijo z osebnimi poslovnimi letali (nasmeh), je pač nekaj, kar se naučiš sprejeti. Seveda si po kakih napornih srečanjih, ko so „najpomembnješi poslovneži“ doma že po nekaj urah, ti pa še pol dneva čakaš in se presedaš na Dunaju, preden prideš domov, želiš, da bi bil v njihovi vlogi. To so pač male človeške zavisti, ki so v bistvu zelo podobne, kjerkoli na socialni lestvici si. Potem se pač moraš odločiti, koliko ti kaj pomeni. Jaz raje z zavistjo gledam mladeniče, ki se z gorskim kolesom s polno hitrostjo spustijo čez korenine . . . , sem pa tudi zadovoljen, ko grem po isti poti počasi in previdno za njimi . . . in se mi zdi že to uspeh. Ali dobra smučarija. Ni treba iti ravno v Kanado na „*heliski*“[11] . . . , pred leti je bila krasna in dovolj drzna smuka po celem snegu že na Starem vrhu. Smučanje po celem snegu je namreč moja strast.

Kaj so glavni izzivi v poklicu poslovneža?

Glede na smeri razvoja gospodarstva in potrošništva postaja nujno, da zna prodajalec česarkoli svoj produkt ali storitev oblikovati in ponuditi tako, da

[11] Heliski, ali heli-ski, zvrst prostega smučanja po neutrjenih snežnih in ledeniških terenih, ponavadi z visokih gora, kamor smučarja dvigne helikopter. Kanada je znana po svojih heli-ski smučinah.

jo kupec prepozna kot nekaj, kar potrebuje, kar rešuje njegov problem, in jo je zato pripravljen naročiti in plačati. Zaradi konkurence je to še težje, saj moraš to storiti bolje od drugih. In v tem osnovnem principu poslovanja, ponudbe in prodaje so vse branže na istem, pa naj gre za prevoz tovora ali za matematično znanje, ki ga želimo v obliki neke aplikativne uporabe ponuditi v uporabo, ali celo, zadeva najbrž ni dosti drugačna, če želimo matematično znanje „prodati" v obliki vrhunskega znanstvenega članka. In karkoli izmed tega počnemo, gre vse bolj za sodelovanje, kjer je zelo pomembno delo organizirati tako, da smo uspešni kot celota. Pri tem je enako pomembna kvaliteta izdelave produkta kot njegovo plasiranje na trg. Če ti kupca ne uspe prepričati, da je tvoj izdelek zares boljši od konkurenčnega, ti kvaliteta prav nič ne pomaga. V tem smislu je poslovanje podobno dvema najstarejšima „biznisoma": vojskovanju in (nasmeh) ... da niti ne imenujem drugega ...

Je, kot si vljudno zamolčal, bistvo (modernega) uspešnega „biznisa" res podobno načelom najstarejših človeških obrti, vojskovanja in – ugibam – prostitucije? Lahko, četudi z zamolčanimi besedami, razložiš?

Ja, vojskovanje temelji na motivaciji in strahu ... strategiji in taktiki, kako ljudi usmeriti, da bodo vsi stremeli v isto smer in se zavzeto žrtvovali za dosego postavljenih ciljev. To so tudi načela uspešne proizvodnje oziroma ustvarjanja produktov, neodvisno od dejavnosti, pa naj gre za proizvodnjo avtomobilov ali za delo v šoli. Potem pa je treba produkt prodati. To je marketing, katerega najbolj grobo bistvo je podobno kot pri (nasmeh) prostituciji, to je, da skušamo kupca prepričati, da dobro plača naš produkt kot dragocen in težko dostopen, čeprav ga je mogoče (tudi zastonj) dobiti na vsakem koraku (nasmeh) ...

Naj bi podobno „prodajali" tudi matematiko?

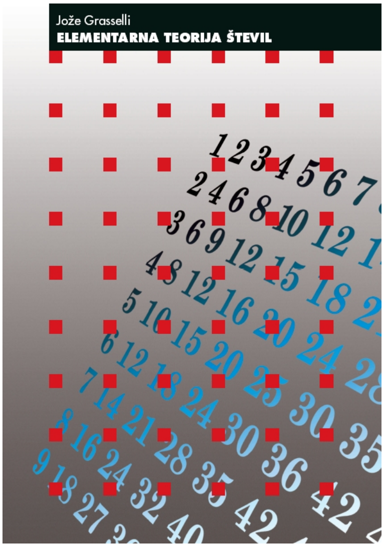
Ja, škoda, da ne znamo ali da matematiki ne znate matematike bolje prodajati. Mogoče bi tedaj pogosteje vedeli, o čem sploh govorimo. Hudo je, ko lahko velja „JA" in „NE" hkrati in to ljudi niti ne moti. Fino bi bilo, če bi matematiki znali tudi drugim ali vsaj tistim, ki so za družbeni razvoj najodgovornejši, prodati in jih prepričati o vrednosti svojega blaga, to je v nujnost natančnega, globokega, doslednega, korektnega in prodornega razmišljanja. S tem bi matematiki storili največ koristnega ...

Tomaž, hvala za pogovor.

Pogovor je pripravil Damjan Kobal

NOVE KNJIGE

Jože Grasselli: ELEMENTARNA TEORIJA ŠTEVIL, Knjižnica Sigma 87, DMFA–založništvo, Ljubljana 2009, 168 strani.



Teorija števil je matematično področje, ki raziskuje lastnosti in odnose v množici celih števil. Glede na to, kakšne probleme v teoriji števil matematiki rešujejo in kakšne prijeme pri tem uporabljajo, jo je po modernem pojmovanju smiselno na grobo razdeliti na elementarno, analitično, algebraično, geometrično, kombinatorično, verjetnostno in računsko teorijo števil. Knjižica prof. Grassellija se ukvarja s prvo, torej z elementarno teorijo števil. To ni avtorjevo prvo delo s tako vsebino, že davnega leta 1966 je namreč prav tako v zbirki Sigma izšla njegova knjižica z naslovom *Osnove teorije števil*, ki je v isti zbirki, le nekoliko predelana, izšla še leta 1975.

Kratkemu uvodu, v katerem so razloženi osnovni pojmi, sledi glavna vsebina, ki je razdeljena na šest poglavij. V prvem je govor o deljivosti celih števil, kamor seveda spadajo največji skupni delitelj, Evklidov algoritem, reševanje enačbe $ax + by = c$ v celih številih, najmanjši skupni večkratnik in praštevila. Drugo poglavje obravnava aritmetične funkcije in njihove lastnosti: število in vsota deliteljev celega števila, znamenito Eulerjevo funkcijo $\varphi(n)$, funkcijo celi del, Möbiusovo funkcijo in funkcijo $\pi(\xi)$, ki pove, koliko je praštevil, ki ne presegajo realnega števila ξ.

Tretje poglavje se ukvarja s kongruenco števil, kongruenčnimi razredi in sistemi ostankov, pa tudi s Fermatovim, Eulerjevim ter Wilsonovim izrekom. Poglavje se konča z obravnavo reda števila glede na dani modul. V tem poglavju se lahko med drugim naučimo reševati tekmovalne naloge, pri katerih je treba najti ostanek pri deljenju kakšnega zelo velikega celega števila z danim naravnim številom.

Četrto poglavje nas najprej vodi skozi reševanje linearnih kongruenc in sistemov linearnih kongruenc. Tu srečamo znameniti kitajski izrek o ostankih. Ne zadržuje pa se le pri linearnih kongruencah, ampak kar obsežno nadaljuje z višjimi kongruencami in konča pri modulih s primitivnimi koreni ter indeksih števila za dani primitivni koren po izbranem modulu.

Peto poglavje je v resnici kar zahtevno, prinaša namreč kvadratni reciprocitetni zakon. Njegov dokaz poteka elementarno, korak za korakom. Najprej uvede Legendrov simbol in opiše njegove lastnosti. Nato navede in dokaže Gaussovo lemo ter formulira in dokaže kvadratni reciprocitetni zakon. Poglavje se konča s splošno kvadratno kongruenco.

Zadnje, šesto poglavje se ubada z diofantskimi enačbami. Pri teh iščemo celoštevilske rešitve algebraičnih enačb, ki imajo celoštevilske koeficiente. Najprej so na vrsti linearne diofantske enačbe, katerim sledi Lagrangeev izrek, ki pravi, da je vsako naravno število vsota štirih kvadratov celih števil. Izvemo tudi, kdaj se da naravno število zapisati kot vsota dveh kvadratov celih števil. Poglavje na koncu z Legendrovim izrekom odgovarja še na vprašanje o rešljivosti diofantske enačbe $ax^2+by^2+cx^2=0$ in o racionalnih točkah na stožnicah, katerih enačbe imajo racionalne koeficiente.

Knjižica je napisana v lepem, klenem slovenskem jeziku, je primerno strukturirana, izreki so oddvojeni in oštevilčeni, opremljena je s številnimi zgledi, nalogami in opombami. Definicije niso posebej razvidne, ampak so vtkane kar v besedilo. Prav tako dokazi, za katere pa je popolnoma evidentno, kje se začnejo in kje končajo.

V dodatku lahko preberemo precej zanimivih zgodovinskih podatkov, ki povejo, kako se je razvijala teorija števil. Natančneje je opisana Abelova grupa $G(m)$, ki je izomorfna reduciranemu sistemu ostankov po modulu m, in na kratko so tudi podane osnovne ideje, kako se elementarna teorija števil uporablja v kriptografiji. Ne manjkajo niti rešitve nalog, ki so podane sproti, na koncu poglavij, knjigo pa skleneta seznam literature in stvarno kazalo.

Delo je namenjeno vsem, ki se v teorijo števil šele vpeljujejo, torej tudi dijakom, saj za razumevanje ni treba posebnega matematičnega predznanja. Začetnik bo morda včasih moral malo pogledati v kakšen učbenik ali pa se vrniti za nekaj strani nazaj, da bo potem laže napredoval. V roke pa bodo knjižico radi vzeli tudi tudi tisti, ki so elementarno teorijo števil nekoč že obvladali, a so z leti že marsikaj pozabili.

Knjižico lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 11,99 EUR.

Marko Razpet

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

MathJax – nova možnost prikazovanja matematičnih formul na spletu?

Kot vsi vemo, je prikaz matematike na spletnih straneh pogosto nezadovoljiv. Pregled dosedanjih načinov upodabljanja matematičnih formul najdemo na [1].

Zdaj imamo novo možnost: MathJax [2]. Poskusna različica tega programa ima obseg: pol MB samega programa in 13 MB fontov. V HTML dokumentu lahko, kot pravi navodilo, uporabimo podmnožico LaTeXovih ukazov. V večini brskalnikov naj bi se formule lepo vključile v besedilo. Rezultat je mogoče povečevati. Na poskusni strani sem z ukazom Ctrl+ dejansko dobil brezhibne povečave pri nekaterih vrednostih, pri določenih vmesnih stopnjah pa so bile nekatere formule rahlo porezane. Program naj bi omogočal kopiranje in lepljenje formul. V bližnji prihodnosti naj bi MathJax podpiral tudi MathML in tako omogočal mnogo lepšo predstavitev formul. Pri razvoju sistema sodelujejo AMS (American Mathematical Society), SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) in APS (American Physical Society), podpira pa ga tudi založba Elsevier.

LITERATURA

[1] *Writing Math on the Web*, American Scientist, `http://www.americanscientist.org/issues/pub/2009/3/writing-math-on-the-web` .

[2] *MathJax*, domača stran, `http://www.mathjax.org/`.

Peter Legiša

STROKOVNA EKSKURZIJA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira (predvidoma) v soboto, 18. septembra 2010, strokovno ekskurzijo v TRST. Če želite prejemati nadaljnja obvestila, prosim, da to sporočite čimprej na naslov Mitja.Rosina@ijs.si. Obenem se lahko preliminarno (neobvezujoče) prijavite; prijave bodo možne tudi pozneje.

Okvirni program:

8:00	Odhod iz Ljubljane z avtobusom
9:30	Miramar – Hiša eksperimentov
11:00	Miramar – grad in arboretum
13:00	Rilkejeva pot po pečinah od Sesljana do Devina
14:00	Devinski grad
15:00	Naravni rezervat za ptice ob ustju Soče „Isola di Cona“ (s strokovnim vodstvom)
18:00	Večerja nekje na Krasu

Prisrčno vabljeni!

Mitja Rosina

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2010
Letnik 57, številka 1
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Schnirelmannov izrek (Vinko Medic) 1–10

Detekcija nevidnih interferenčnih slik z Michelsonovim interferometrom (Ivo Verovnik in Andrej Likar) 11–19

Intervju

Tomaž Schara (pripravil Damjan Kobal) 20–38

Nove knjige

Elementarna teorija števil (Marko Razpet) 39–40

Vesti

Matematične novice (Peter Legiša) 40–III

Strokovna ekskurzija (Mitja Rosina) III

CONTENTS

Articles **Pages**

Schnirelmann's theorem (Vinko Medic) 1–10

Detection of invisible interference patterns using Michelson interferometer (Ivo Verovnik and Andrej Likar) 11–19

Interview 20–38

New books 39–40

News 40–III

Na naslovnici: Na vodni gladini v posodici, pod katero je močan magnet, nastane drobna vdolbina. Divergentni curek laserske svetlobe, ki se odbija od sten vdolbine, ustvarja na zaslonu zanimiv interferenčni vzorec (avtor: Gorazd Planinšič). Glej članek na strani 11.